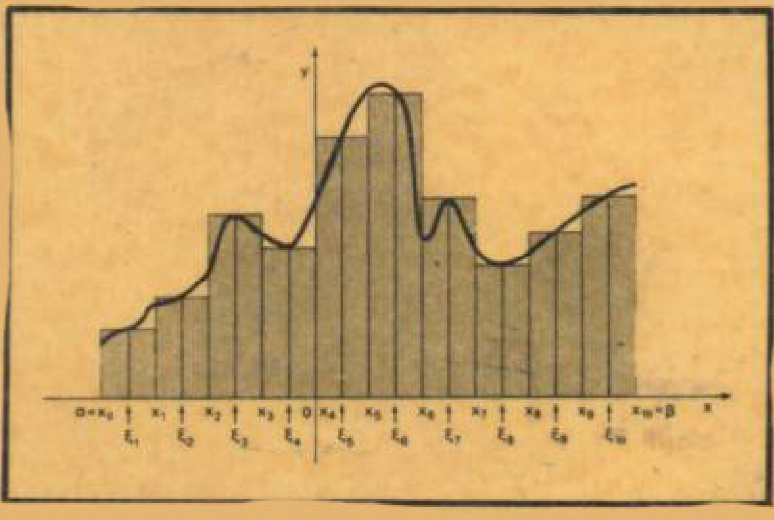
ΣΩΤΗΡΗ Κ. ΝΤΟΥΓΙΑ
Επίκουρου Καθηγητή Πανεπιστημίου

απειροστικός λογισμός 2

- **ολοκλήρωμα (αόριστο, ορισμένο γενικευμένο)**
- **Μετασχηματισμοί Laplace**



... από τον συγγραφέα

Το βιβλίο αυτό είναι συνέχεια του βιβλίου μου "Απειροστικός Λογισμός Ι" και γράφτηκε για να χρησιμοποιηθεί ως διδακτικό για το μάθημα "Απειροστικός Λογισμός ΙΙ" του Νέου Προγράμματος Σπουδών του Α' έτους του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

Το Κεφάλαιο 1 ασχολείται με το αόριστο ολοκλήρωμα συναρτήσεως μιας πραγματικής μεταβλητής και δίνονται οι βασικές μέθοδοι υπολογισμού αόριστων ολοκληρωμάτων.

Η βασική θεωρία του ολοκληρώματος του Riemann δίνεται στο Κεφάλαιο 2. Οι εφαρμογές του ορισμένου ολοκληρώματος δίνονται στην §2.10.

Με το Γενικευμένο ολοκλήρωμα ασχολείται το Κεφάλαιο 3, ενώ στο Κεφάλαιο 4 δίνεται η βασική θεωρία από τους Μετασχηματισμούς Laplace.

Καταβλήθηκε ιδιαίτερη προσπάθεια ώστε κάθε απόδειξη να είναι πλήρως επεξεργασμένη, ενώ παράλληλα οι πολλές επεξηγήσεις που υπάρχουν στο βιβλίο υπό μορφή παρατηρήσεων, αναλύουν με λεπτομέρεια κάθε βήμα, καθορίζοντας την προβληματική και τις μεθόδους. Οι παρατηρήσεις αυτές επισημαίνουν επίσης τα σημεία που πρέπει να προσεχθούν ιδιαίτερα για την καλύτερη κατανόηση των εννοιών ή επεξηγούν με αντιπαραδείγματα την αναγκαιότητα των συνθηκών. Για τον σκοπό αυτό δίνονται επίσης και αρκετά παραδείγματα. Υπάρχουν και ορισμένα θεωρήματα που παραλείπουμε τις αποδείξεις τους, επειδή δεν εξυπηρετούν τους σκοπούς αυτού του βιβλίου. Κάθε παράγραφος, εκτός από ελάχιστες, κλείνει με μερικές εφαρμογές.

Επειδή κανένας δεν μπορεί να ισχυριστεί ότι θα διαβάσει Απειροστικό Λογισμό χωρίς να λύσει ασκήσεις -πολλές ασκήσεις- γι'αυτό σε κάθε παράγραφο δίνεται ένας ικανός αριθμός ασκήσεων. Οι ασκήσεις αυτές ποικίλουν σε δυσκολία. Άλλες είναι ασκήσεις "ρουτίνας", εφαρμογές στους τύπους και τα θεωρήματα και άλλες πιο σύνθετες και πιο θεωρητικές.

Κάθε Κεφάλαιο (πλην του 4) κλίνει με μια σειρά ερωτήσεων "Σωστό ή λάθος" και μια σειρά από ασκήσεις για επανάληψη. Οι απαντήσεις των ερωτήσεων καθώς και υποδείξεις ή πλήρεις λύσεις όλων των ασκήσεων υπάρχουν στο Παράρτημα 1 στο τέλος του βιβλίου.

Στο Παράρτημα 2 δίνονται διάφοροι χρήσιμοι πίνακες.

Θεωρώ υποχρέωσή μου να ευχαριστήσω το προσωπικό του Τομέα της Μαθηματικής Ανάλυσης του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων και ιδιαίτερα τους κ.κ. Γ. Καρακώστα, Θ.Βιδάλη και Χ.Πεταλά για τις παρατηρήσεις τους, τις υποδείξεις τους και τη συμβολή τους στην τελική εμφάνιση του βιβλίου.

Ιωάννινα, Μάρτιος 1985 Σ.Κ. Ντούγιας

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

αόριστο ολοκλήρωμα 1

§ 1.1. ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΑΟΡΙΣΤΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

Υπάρχουν δυο δρόμοι απ'τους οποίους μπορούμε να φτάσουμε στο αόριστο ολοκλήρωμα. Ο ένας, τον οποίο και θα ακολουθήσουμε σ'αυτό το κεφάλαιο, είναι να ορίσουμε την ολοκλήρωση σαν αντίστροφη πράξη της παραγώγισης. Ο δεύτερος, τον οποίο θα παρουσιάσουμε στο δεύτερο κεφάλαιο, ξεκινάει από έναν πιο γενικό και άμμεσο ορισμό, και βασίζεται ουσιαστικά, στην έννοια του εμβαδού που περικλείεται από μια καμπύλη. Και οι δυο ορισμοί όπως θα δούμε στην § 2.6 είναι ισοδύναμοι.

Το κεφάλαιο αυτό έχει πρακτικό χαρακτήρα. Θα εξετάσουμε μεθόδους υπολογισμού αόριστων ολοκληρωμάτων.

Ορισμός 1.1. Έστω $f: \Delta \to \mathbb{R}$, Δ ένα διάστημα. Αν $F:\Delta \to \mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση, τέτοια ώστε $F'(x)=f(x)$, $\forall x \in \Delta$ τότε η F λέγεται αρχική ή παράγουσα της f στο Δ και συμβολίζεται με

$$F(x)=\int f(x)dx, x \in \Delta$$

Παρατήρηση 1.1.

Το διάστημα Δ θα έχει μια από τις παρακάτω μορφές:

$$[\alpha,\beta],[\alpha,\beta),(\alpha,\beta],(\alpha,\beta),[\alpha,+\infty),(\alpha,+\infty),(-\infty,\beta],(-\infty,\beta),(-\infty,+\infty)$$

Όταν το διάστημα Δ είναι κλειστό, π.χ. $\Delta=[\alpha,\beta]$ τότε όταν λέμε $F'(x)=f(x)$, $\forall x \in \Delta$ εννοούμε ότι υπάρχει η $F'(x)$, $\forall x \in (\alpha,\beta)$ και οι $F'_+(\alpha)$, $F'_-(\beta)$.

Παρατήρηση 1.2.

Η αρχική μιας συναρτήσεως f πολλές φορές λέγεται και αντιπαράγωγος της f. Το σύμβολο $\int$ και τα γράμματα dx δεν έχουν έννοια, αν τα θεωρήσουμε χωριστά. Αυτά θεωρούνται σαν ένα σύμβολο για να δηλώσουμε την πράξη της ολοκλήρωσης. Μ'άλλα λόγια το $\int f(x)dx$ είναι μια συντομογραφία για την $F(x)$.

Παρατήρηση 1.3.

Ο ορισμός 1.1 παρουσιάζει κάποιο κενό. Δεν έχουμε εξετάσει αν τέτοιες συναρτήσεις υπάρχουν. Όπως θα δούμε στο δεύτερο κεφάλαιο μια συνάρτηση έχει αρχική σε ένα διάστημα Δ, όταν αυτή είναι συνεχής στο Δ. Η συνθήκη όμως της συνέχειας είναι ικανή και όχι αναγκαία για την ύπαρξη της αρχικής.

Βέβαια υπάρχουν και συναρτήσεις που δεν έχουν αρχική συνάρτηση, όπως δείχνει το επόμενο

Παράδειγμα 1.1.

Η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

δεν έχει αρχική συνάρτηση στο $\mathbb{R}$. Πραγματικά ας υποθέσουμε το αντίθετο, ότι δηλ. υπάρχει μια συνάρτηση F ορισμένη σε κάποιο διάστημα $\Delta \subseteq \mathbb{R}$, τέτοια ώστε $F'(x)=f(x)$, $\forall x \in \Delta$. Τότε από το θεώρημα του Darboux* η f θα πρέπει να έχει αναγκαστικά την ιδιότητα των ενδιάμεσων τιμών. Η f όμως δεν έχει την ιδιότητα των ενδιάμεσων τιμών, αφού αυτή δεν παίρνει την τιμή $\frac{1}{2}$ η οποία βρίσκεται μεταξύ των $f(-7)=0$ και $f(e)=1$, και επομένως δεν έχει αρχική.

---

* Απειροστικός Λογισμός 1, Θεώρημα 5.8.

Θεώρημα 1.1. Αν F_1 και F_2 είναι δύο αρχικές της συναρτήσεως f σε ένα διάστημα Δ, τότε:

$$F_2(x)=F_1(x)+c, \ \forall x \in \Delta \qquad (1)$$

όπου c αυθαίρετη σταθερή. Αντίστροφα, αν F_1 είναι μία αρχική της f στο Δ και αν η F_2 ορίζεται στο Δ και ικανοποιεί την (1) για τυχαία σταθερή, τότε η F_2 είναι μια αρχική της f στο Δ.

Απόδειξη

Έστω $F(x)=F_2(x)-F_1(x)$. Τότε με την βοήθεια του ορισμού 1.1 έχουμε:

$$F'(x)=F_2'(x)-F_1'(x)=f(x)-f(x)=0, \ \forall x \in \Delta.$$

Άρα η F είναι σταθερή στο Δ, από το Πόρισμα του θεωρήματος 5.12 του Απειροστικού Λογισμού 1. Άρα $F(x)=c$ ή $F_2(x)=F_1(x)+c, \ \forall x \in \Delta$. Το αντίστροφο επίσης είναι απλό.■

Παρατήρηση 1.4.

Το θεώρημα 1.1 λέει ότι η αρχική μιας συναρτήσεως f ορίζεται με την προσθήκη μιας αυθαίρετης σταθερής. Συνεπώς η παράσταση $\int f(x)dx$ δεν ορίζεται μονοσήμαντα. Αν F είναι μια αρχική της f σε ένα διάστημα Δ τότε η συνάρτηση F+c για κάθε $c \in \mathbb{R}$ λέγεται α ό ρ ι σ τ ο ο λ ο κ λ ή ρ ω μ α της f στο Δ.

Για την απόδειξη του θεωρήματος 1.1 χρησιμοποιήθηκε το θεώρημα 5.12 του Διαφορικού Λογισμού, στο οποίο η υπόθεση ότι το Δ είναι διάστημα, ήταν ουσιώδης. Γι'αυτό το θεώρημα 1.1 μπορεί να μην ισχύει αν θεωρήσουμε ένωση διαστημάτων. Βλέπε και Παρατήρηση 1.6 παρακάτω.

Παρατήρηση 1.5.

Υπάρχει μια πολύ ουσιαστική διαφορά μεταξύ του Διαφορικού και του Ολοκληρωτικού Λογισμού: η π α ρ ά γ ω γ ο ς μ ι α ς σ τ ο ι χ ε ι ώ δ ο υ ς σ υ ν α ρ τ ή σ ε ω ς ε ί ν α ι π ά ν τ α μ ι α σ τ ο ι χ ε ι ώ δ η ς σ υ ν ά ρ τ η σ η, ενώ το α ό ρ ι σ τ ο ο λ ο κ λ ή ρ ω μ α μ ι α ς σ τ ο ι χ ε ι ώ δ ο υ ς σ υ ν α ρ τ ή σ ε ω ς δ ε ν ε ί ν α ι π ά ν τ α μ ι α σ τ ο ι χ ε ι ώ-δ η ς   σ υ ν ά ρ τ η σ η. Δηλαδή δεν μπορεί να εκφραστεί με την βοήθεια στοιχειωδών συναρτήσεων.

Υπάρχει όμως μια ευρεία κλάση συναρτήσεων των οποίων τα αόριστα ολοκληρώματα εκφράζονται με την βοήθεια των στοιχειωδών συναρτήσεων. Για να εφαρμόσουμε όμως μεθόδους ολοκληρώσεως σε πολύπλοκες συναρτήσεις, είναι απαραίτητο να σχηματίσουμε έναν πίνακα με τα βασικά ή στοι-

Ολοκληρώματα στοιχειωδών συναρτήσεων

α/α	ΤΥΠΟΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ	ΔΙΑΣΤΗΜΑ ΠΟΥ ΙΣΧΥΕΙ
1	$\int x^{\nu}dx=\frac{x^{\nu+1}}{\nu+1}+c$	i) $\nu\neq-1,\ x>0$ ii) $\nu\neq-1,\ x<0$ iii) $\nu\geqslant0,\ x\in\mathbb{R}$
2	$\int\frac{dx}{x}=\log\lvert x\rvert+c$	$x>0$ ή $x<0$
3	$\int x^{\alpha}dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c$	i) $\alpha\neq-1,\ x>0$ ii) $\alpha\geqslant0,\ x\geqslant0$
4	$\int\alpha^{x}dx=\frac{\alpha^{x}}{\log\alpha}+c$	$\alpha\in(0,+\infty)-\{1\},x\in\mathbb{R}$
5	$\int\sin x\,dx=-\cos x+c$	$x\in\mathbb{R}$
6	$\int\cos x\,dx=\sin x+c$	$x\in\mathbb{R}$
7	$\int\frac{dx}{\cos^2x}=tgx+c$	$x\in\left(k\pi-\frac{\pi}{2},\ k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$
8	$\int\frac{dx}{\sin^2x}=-ctgx+c$	$x\in(k\pi,\ k\pi+\pi)$
9	$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=Arsinx+c$ $=\frac{\pi}{2}-Arcosx+c$	$x\in(-1,1)$
10	$\int\frac{dx}{1+x^2}=Artgx+c$	$x\in\mathbb{R}$
11	$\int\sinh x\,dx=\cosh x+c$	$x\in\mathbb{R}$
12	$\int\cosh x\,dx=\sinh x+c$	$x\in\mathbb{R}$

χειώδη ολοκληρώματα. Από τον πίνακα των παραγώγων των στοιχειωδών συναρτήσεων και τον ορισμό 1.1 προκύπτει εύκολα ο παραπάνω πίνακας των βασικών ή στοιχειωδών αόριστων ολοκληρωμάτων.

Παρατήρηση 1.6.

Από το ολοκλήρωμα 2 του παραπάνω πίνακα έχουμε ότι:

$$\int \frac{dx}{x} = \log|x| \quad \text{αν} \quad x>0 \quad \text{ή} \quad x<0.$$

Αυτό δεν μπορεί να γραφεί στην μορφή

$$\int \frac{dx}{x} = \log|x|+c, \; x \in \mathbb{R}-\{0\}=(-\infty,0) \cup (0,+\infty)$$

γιατί δεν έχουμε ορίσει το αόριστο ολοκλήρωμα σε σύνολα που δεν είναι διαστήματα. Για παράδειγμα οι συναρτήσεις

$$f(x)=\begin{cases} \log|x|+1, & x<0 \\ \log|x|+2, & x>0 \end{cases} \quad \text{και} \quad g(x)=\begin{cases} \log|x|+2, & x<0 \\ \log|x|+1, & x>0 \end{cases}$$

δεν ικανοποιούν το θεώρημα 1.1. (Να το επαληθεύσετε).

Θεώρημα 1.2. Αν για τις συναρτήσεις $f_1, f_2 : \Delta \to \mathbb{R}$ υπάρχουν τα αόριστα ολοκληρώματα στο Δ, τότε υπάρχει και το αόριστο ολοκλήρωμα της $c_1 f_1 + c_2 f_2$ και μάλιστα:

$$\int [c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)]dx = c_1 \int f_1(x)dx + c_2 \int f_2(x)dx$$

Απόδειξη

Έστω $\int f_1(x)dx = F_1(x)$ και $\int f_2(x)dx = F_2(x)$. Τότε:

$F_1'(x) = f_1(x)$ και $F_2'(x) = f_2(x)$, $\forall x \in \Delta$. Συνεπώς

$$\frac{d}{dx}[c_1F_1(x)+c_2F_2(x)] = c_1F_1'(x)+c_2F_2'(x) = c_1f_1(x)+c_2f_2(x)$$

Από τον Ορισμό 1.1 και το Θεώρημα 1.1 το συμπέρασμα είναι προφανές.■

Πόρισμα:

$$\int \sum_{k=1}^{\nu} c_k f_k(x)dx = \sum_{k=1}^{\nu} c_k \int f_k(x)dx$$

Ας δούμε τώρα μερικά παραδείγματα υπολογισμού αόριστων ολοκληρωμάτων με αναγωγή στον πίνακα των στοιχειωδών ολοκληρωμάτων.

Παράδειγμα 1.2.

$$\int \frac{x}{2x+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{2x+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1-1}{2x+1}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{2x+1}dx - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{2x+1} = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{4}\int \frac{d(2x+1)}{2x+1}$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\log|2x+1| + c, \quad x > -\frac{1}{2} \text{ ή } x < -\frac{1}{2}$$

Παράδειγμα 1.3.

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x}$$

$$= tgx - ctgx + c, \quad k\pi < x < k\pi + \frac{\pi}{2} \text{ ή } k\pi + \frac{\pi}{2} < x < k\pi + \pi$$

Παράδειγμα 1.4.

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{tgx} = \int \frac{d\,tgx}{tgx} = \log|tgx| + c, \quad \Delta = ;$$

Παράδειγμα 1.5.

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{d\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}} = \log\left|tg\frac{x}{2}\right| + c, \quad k\pi < x < k\pi + \pi$$

από το παράδειγμα 1.4.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.1. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

α) $\int(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)dx$ β) $\int \frac{\sqrt{x}-x^3e^x+x^2}{x^3}\,dx$

γ) $\int \frac{2x-\sqrt{\mathrm{Arsin}x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ δ) $\int \frac{m}{\sqrt[3]{(\alpha+\beta x)^2}}\,dx$

ε) $\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}\,dx$ στ) $\int e^{-x^3}x^2dx$

1.2. Επίσης τα ολοκληρώματα:

α) $\int \frac{x+2}{2x-1}\,dx$ β) $\int \frac{dx}{\cos x}$

γ) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx$ δ) $\int \cos kx\,dx$

ε) $\int e^{-\lambda x}dx$ στ) $\int \frac{2^x}{\sqrt{1-4^x}}\,dx$

1.3. Όμοια τα ολοκληρώματα:

α) $\int \cos^2x\,dx$ β) $\int \sin^2x\,dx$

γ) $\int \cos x\cdot\sin 3x\,dx$ δ) $\int \frac{dx}{\alpha^2+x^2}$

ε) $\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$ στ) $\int \frac{1+\cos^2x}{1+\cos 2x}\,dx$

§ 1.2. ΜΕΘΟΔΟΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ - Α΄ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ

Δύο είναι οι βασικές μέθοδοι ολοκλήρωσης. Η μέθοδος της αντικατάστασης ή της αλλαγής μεταβλητής και η μέθοδος ολοκλήρωσης κατά παράγοντες ή παραγοντική ολοκλήρωση. Η μέθοδος της αντικατάστασης στηρίζεται στο επόμενο

Θεώρημα 1.3. Έστω A, B είναι δυο διαστήματα και $f: A \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση. Επίσης έστω $\varphi: B \to \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με $\varphi'(t) \neq 0$, $\forall t \in B$ και τέτοια ώστε $\mathcal{R}(\varphi) \subseteq A$. Τότε

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

(όπου στο τελευταίο ολοκλήρωμα μετά τον υπολογισμό θα επανέλθουμε στην αρχική μεταβλητή με την αντίστροφη αντικατάσταση $t=\varphi^{-1}(x)$).

Απόδειξη

Έστω $F(x)=\int f(x)dx$. Τότε $F'(x)=f(x)$, $\forall x \in A$. Θέτουμε $G(t)=F(\varphi(t))$ $t \in B$. Από το θεώρημα παραγώγισης σύνθετης συναρτήσεως έχουμε:

$$G'(t)=F'(\varphi(t))\varphi'(t)=f(\varphi(t))\varphi'(t)$$

Συνεπώς η G έχει παράγουσα στο B, το οποίο αποδεικνύει και το θεώρημα.■

Παράδειγμα 1.6.

Θεωρούμε το ολοκλήρωμα $I=\int \sqrt{1-x^2}dx$, $-1<x<1$. Θέτουμε $x=\sin t$, $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$. Τότε το πεδίο τιμών της είναι το διάστημα $-1<x<1$ και η παράγωγός της είναι $\cos t>0$, $\forall t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Άρα το $\sin t$ είναι γνήσια αύξουσα με αντίστροφη συνάρτηση την $t=\mathrm{Arsin}x$, $-1<x<1$ και από το θεώρημα 1.3 έχουμε:

$$I=\int \sqrt{1-x^2}dx=\int \sqrt{1-\sin^2 t}\cdot(\sin t)'dt=\int \cos t\cdot\cos t dt$$

$$=\int \cos^2 t dt=\frac{1}{2}\sin t\cdot\cos t+\frac{1}{2}t \text{(άσκηση 1.3α)}$$

$$=\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\mathrm{Arsin}x+c,\ -1<x<1.$$

Παρατήρηση 1.7.

Μια πολύ απλή αντικατάσταση, που μπορεί να εφαρμοστεί σε οποιοδήποτε αόριστο ολοκλήρωμα, είναι η λεγόμενη γ ρ α μ μ ι κ ή α ν τ ι κ α τ ά σ τ α σ η $t=ax+\beta$, $a,\beta \in \mathbb{R}$ με $a \neq 0$. Τότε είναι:

$$\int f(\alpha x+\beta)dx=\frac{1}{\alpha}\int f(t)dt$$

Παράδειγμα 1.7.

Έστω το ολοκλήρωμα $\int \sin(\alpha x+\beta)dx, x\in\mathbb{R}$. Τότε θέτοντας $\alpha x+\beta=t$ έχουμε:

$$\int \sin(\alpha x+\beta)dx=\int \frac{1}{\alpha}\cdot \sin t dt=-\frac{1}{\alpha}\cos t=-\frac{1}{\alpha}\cos(\alpha x+\beta)+c$$

Παράδειγμα 1.8.

Ας θεωρήσουμε τώρα το ολοκλήρωμα $I=\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$ με $f(x)\neq 0$, $\forall x\in\Delta$. Τότε θέτοντας $f(x)=t$ έχουμε:

$$I=\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int \frac{dt}{t}=\log|t|+c=\log|f(x)|+c$$

στα διαστήματα στα οποία ισχύει μόνο $f(x)>0$ ή $f(x)<0$.

Από το παράδειγμα αυτό έχουμε την παρακάτω μέθοδο:

Αν η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι πηλίκο δυο συναρτήσεων, έτσι ώστε ο αριθμητής να είναι η παράγωγος του παρονομαστή, τότε το αόριστο ολοκλήρωμα ισούται με τον λογάριθμο του παρονομαστή.

Έτσι έχουμε:

$$\int tgx dx=\int \frac{\sin x}{\cos x}dx=\int \frac{(-\cos x)'}{\cos x}dx=-\log|\cos x|+c$$

$$k\pi-\frac{\pi}{2}<x<k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$$

$$\int ctgx dx=\int \frac{\cos x}{\sin x}dx=\int \frac{(\sin x)'}{\sin x}dx=\log|\sin x|+c$$

$$k\pi<x<k\pi+\pi, k\in\mathbb{Z}$$

$$\int \frac{dx}{x\log|x|}=\int \frac{(\log|x|)'}{\log|x|}dx=\log|\log|x||+c$$

$$0<x<1 \text{ ή } 1<x<+\infty.$$

Μια κατάλληλη εκλογή της αντικατάστασης διευκολύνει τον υπολογισμό ενός ολοκληρώματος. Δεν υπάρχει γενικός κανόνας για την εκλογή της αντικατάστασης. Αυτό εξαρτάται κάθε φορά από το ολοκλήρωμα που έχουμε. Μπορούμε όμως να αναφέρουμε μερικές πολύ χαρακτηριστικές περιπτώσεις:

Περίπτωση 1η: Αν το ολοκλήρωμα περιέχει την παράσταση $\sqrt{\alpha^2-x^2}$ τότε θέτουμε $x=|\alpha|\sin\theta$ ή $x=|\alpha|\cos\theta$. Θα έχουμε τότε:

i) αν $x=|\alpha|\sin\theta$, $dx=|\alpha|\cos\theta d\theta$, $\sqrt{\alpha^2-x^2}=|\alpha|\cos\theta$

ii) αν $x=|\alpha|\cos\theta$, $dx=-|\alpha|\sin\theta d\theta$, $\sqrt{\alpha^2-x^2}=|\alpha|\sin\theta$

Παράδειγμα 1.9.

Έστω το ολοκλήρωμα $I=\int\frac{x}{\sqrt{\alpha^2-x^2}}dx$, $-|\alpha|<x<|\alpha|$. Θέτουμε $x=|\alpha|\sin\theta$. Τότε θα έχουμε:

$$I=\int\frac{|\alpha|\cdot\sin\theta}{|\alpha|\cdot\cos\theta}\cdot|\alpha|\cos\theta d\theta=|\alpha|\cdot\int\sin\theta d\theta$$

$$=-|\alpha|\cos\theta=-|\alpha|\cdot\sqrt{1-\sin^2\theta}=-\sqrt{\alpha^2-x^2}+c.$$

Περίπτωση 2η: Αν το ολοκλήρωμα περιέχει την παράσταση $\sqrt{\alpha^2+x^2}$ τότε θέτουμε $x=|\alpha|tg\theta$ ή $x=|\alpha|ctg\theta$ ή $x=|\alpha|\sinh z$. Τότε θα έχουμε:

i) αν $x=|\alpha|tg\theta$, $dx=\frac{|\alpha|}{\cos^2\theta}d\theta$, $\sqrt{\alpha^2+x^2}=\frac{|\alpha|}{\cos\theta}$

ii) αν $x=|\alpha|\sinh z$, $dx=|\alpha|\cosh z$, $\sqrt{\alpha^2+x^2}=|\alpha|\cosh z$

Παράδειγμα 1.10.

Θα υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\int\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}dx$* και με τους δυο τρόπους. Θέτοντας $x=2tg\theta$, έχουμε:

---

* Στα επόμενα όπου το πεδίο ορισμού δεν δίνεται, θα πρέπει να αναζητηθεί από τον αναγνώστη.

$$\int \frac{x}{\sqrt{4+x^2}}\,dx=\int \frac{\frac{2tg\theta}{2}}{\cos\theta}\,\frac{2d\theta}{\cos^2\theta}=2\int \frac{tg\theta}{\cos\theta}d\theta=2\int \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta$$

$$=2\cdot \frac{1}{\cos\theta} \quad (\text{άσκηση } 1.2\gamma)$$

$$= \sqrt{4+x^2}+c.$$

Αν θέσουμε $x=2\sinh z$ θα έχουμε:

$$\int \frac{x}{\sqrt{4+x^2}}\,dx=\int \frac{2\sinh z}{2\cosh z}\cdot 2\cosh z dz=2\int \sinh z dz=2\cosh z=\sqrt{4+x^2}+c.$$

Περίπτωση 3η: Αν το ολοκλήρωμα περιέχει την παράσταση $\sqrt{x^2-\alpha^2}$ τότε θέτουμε $x=|\alpha|\frac{1}{\cos\theta}$ ή $x=\pm|\alpha|\cosh z$ (το + αν $x\geqslant|\alpha|$ και το - αν $x\leqslant-|\alpha|$). Θα έχουμε:

i) αν $x=|\alpha|\frac{1}{\cos\theta}$, $dx=|\alpha|\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}d\theta$, $\sqrt{x^2-\alpha^2}=|\alpha|\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=|\alpha|tg\theta$

ii) αν $x=\pm|\alpha|\cosh z$, $dx=\pm|\alpha|\sinh z dz$, $\sqrt{x^2-\alpha^2}=|\alpha|\sinh z$

Παράδειγμα 1.11.

Έστω $\int\sqrt{x^2-\alpha^2}dx$. Θέτοντας $x=|\alpha|\cosh z$ έχουμε:

$$\int\sqrt{x^2-\alpha^2}dx=\int|\alpha|\sinh z\cdot|\alpha|\sinh z dz=\alpha^2\int\sinh^2 z dz$$

$$=\alpha^2\int\frac{\cosh 2z-1}{2}dz=\frac{\alpha^2}{4}\sinh 2z-\frac{\alpha^2}{2}z$$

$$=\frac{1}{2}|\alpha|\sinh z|\alpha|\cosh z-\frac{\alpha^2}{2}z$$

$$=\frac{x\sqrt{x^2-\alpha^2}}{2}-\frac{\alpha^2}{2}\,\mathrm{Arcosh}\frac{x}{|\alpha|}$$

$$=\frac{x\sqrt{x^2-\alpha^2}}{2}-\frac{\alpha^2}{2}\log\frac{x+\sqrt{x^2-\alpha^2}}{|\alpha|}+c$$

Παρατήρηση 1.8.

Πιο γενικά τα ολοκληρώματα που περιέχουν τις παραστάσεις i) $\sqrt{\alpha^{2\nu}-x^{2\nu}}$ ii) $\sqrt{\alpha^{2\nu}+x^{2\nu}}$ ή iii) $\sqrt{x^{2\nu}-\alpha^{2\nu}}$ υπολογίζονται αν θέσουμε αντίστοιχα·

i) $x^{\nu}=\alpha^{\nu}\sin\theta$ ή $x^{\nu}=\alpha^{\nu}\cos\theta$

ii) $x^{\nu}=\alpha^{\nu}tg\theta$ ή $x^{\nu}=\alpha^{\nu}\sinh z$

iii) $x^{\nu}=\dfrac{\alpha^{\nu}}{\cos\theta}$ ή $x^{\nu}=\alpha^{\nu}\cosh z$

Επίσης και στις τρεις περιπτώσεις η αντικατάσταση $x^{\nu}=\alpha^{\nu}\cdot z^{-1}$ εξυπηρετεί.

Παράδειγμα 1.12.

Ας υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\int\dfrac{dx}{x\sqrt{x^{2\nu}-\alpha^{2\nu}}}$, θέτοντας $x^{\nu}=\alpha^{\nu}z^{-1}$, $\alpha>0$. Τότε $\nu\dfrac{dx}{x}=-\dfrac{dz}{z}$ και έτσι

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^{2\nu}-\alpha^{2\nu}}}=-\frac{1}{\nu}\int\frac{dz}{z\sqrt{\frac{\alpha^{2\nu}}{z^2}-\alpha^{2\nu}}}=-\frac{1}{\nu\alpha^{\nu}}\int\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

$$=-\frac{1}{\nu\alpha^{\nu}}\mathrm{Arsin}z=-\frac{1}{\nu\alpha^{\nu}}\mathrm{Arsin}\frac{\alpha^{\nu}}{x^{\nu}}+c.$$

Περίπτωση 4η: Αν το ολοκλήρωμα περιέχει ριζικό της μορφής $\sqrt{\alpha x+\beta}$ τότε θέτουμε $\sqrt{\alpha x+\beta}=t$.

Παράδειγμα 1.13.

Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\int\dfrac{1}{\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}dx$ θέτουμε $\sqrt{x}=t$. Τότε $x=t^2$, $dx=2tdt$ και

$$\int\frac{1}{\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}dx=\int\frac{1}{t}\cdot\cos t\cdot 2tdt=2\int\cos tdt$$

$$=2\sin t=2\sin\sqrt{x}+c.$$

Περίπτωση 5η: Αν το ολοκλήρωμα περιέχει την παράσταση $\sqrt{2\alpha x-x^2}$, $\alpha>0$ τότε θέτουμε $x=\alpha(1-\cos\theta)$. Θα έχουμε:

$$x=\alpha(1-\cos\theta),\ dx=\alpha\sin\theta d\theta,\ \sqrt{2\alpha x-x^2}=\alpha\cdot\sin\theta$$

Παράδειγμα 1.14.

Ας υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\int \frac{x}{\sqrt{2ax-x^2}}dx$. Θέτουμε $x=a(1-\cos\theta)$ και έχουμε:

$$\int \frac{x}{\sqrt{2ax-x^2}}dx=\int \frac{a(1-\cos\theta)}{a\cdot\sin\theta}\cdot a\sin\theta d\theta=a\int(1-\cos\theta)d\theta$$

$$=a(\theta-\sin\theta)=a\text{Arcos}\left(1-\frac{x}{a}\right)-\sqrt{2ax-x^2}+c.$$

Παρατήρηση 1.9.

Όπως τονίσαμε και στην αρχή της παραγράφου οι παραπάνω περιπτώσεις είναι μερικές χαρακτηριστικές περιπτώσεις που υπολογίζονται εύκολα με τις αντικαταστάσεις που δώσαμε. Δυστυχώς αυτές δεν καλύπτουν όλες τις περιπτώσεις. Μερικές άλλες περιπτώσεις θα δούμε στις εφαρμογές που ακολουθούν.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να υπολογίσετε τα αόριστα ολοκληρώματα:

α) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}-1}$ β) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^6}}$

Λύση

α) Θέτουμε $x=\sin\theta$ (Περίπτωση 1η) και έχουμε:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}-1}=\int \frac{\cos\theta}{\cos\theta-1}d\theta=\int \frac{\cos\theta-1+1}{\cos\theta-1}d\theta$$

$$=\int d\theta-\int \frac{d\theta}{1-\cos\theta}=\theta-\int \frac{d\theta}{1-\cos\theta}$$

$$=\theta-\int \frac{1+\cos\theta}{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}d\theta=\theta-\int \frac{1+\cos\theta}{\sin^2\theta}d\theta$$

$$=\theta-\int \frac{d\theta}{\sin^2\theta}-\int \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}d\theta=\theta+\text{ctg}\theta+\frac{1}{\sin\theta}$$

$$=\text{Arsin}x+\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+\frac{1}{x}+c.$$

β) θέτουμε $x^3=tg\theta$ (Παρατήρηση 1.8) και έχουμε:

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{1+x^6}}=\frac{1}{3}\int\frac{3x^2}{x^3\sqrt{1+x^6}}dx=\frac{1}{3}\int\frac{d\theta}{\cos^2\theta\cdot tg\theta\cdot\frac{1}{\cos\theta}}$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{d\theta}{\sin\theta}=\frac{1}{3}\log\left|tg\frac{\theta}{2}\right|$$

Επειδή όμως $tg\frac{\theta}{2}=\frac{-1+\sqrt{1+tg^2\theta}}{tg\theta}=\frac{-1+\sqrt{1+x^6}}{x^3}$ θα έχουμε τελικά:

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{1+x^6}}=\frac{1}{3}\log\left|\frac{\sqrt{1+x^6}-1}{x^3}\right|+c$$

2. Να υπολογίσετε το αόριστο ολοκλήρωμα:

$$\int\frac{x+1}{x(1+xe^x)}\,dx$$

Λύση

θέτουμε $xe^x=t$. Τότε $(x+1)e^xdx=dt$ και επομένως

$$\int\frac{x+1}{x(1+xe^x)}dx=\int\frac{(x+1)e^x}{xe^x(1+xe^x)}dx=\int\frac{dt}{t(t+1)}$$

$$=\int\frac{t+1-t}{t(t+1)}dt=\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$=\log|t|-\log|t+1|=\log\left|\frac{t}{t+1}\right|=\log\left|\frac{xe^x}{1+xe^x}\right|+c.$$

3. Να υπολογίσετε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int\frac{\alpha x^2-\beta}{x\sqrt{\gamma^2x^2-(\alpha x^2+\beta)^2}}\,dx,\ \alpha>0,\ \beta>0,\ \gamma>0.$$

Λύση

θέτουμε $\alpha x+\frac{\beta}{x}=z$. Τότε $\left(\alpha-\frac{\beta}{x^2}\right)dx=dz$ και

$$\int \frac{\alpha x^2-\beta}{x\sqrt{\gamma^2x^2-(\alpha x^2+\beta)^2}}\,dx = \int \frac{dz}{\sqrt{\gamma^2-z^2}} \quad (\text{θέτουμε } z=\gamma\sin\theta)$$

$$= \int \frac{\gamma\cos\theta}{\gamma\cos\theta}\,d\theta = \theta = \operatorname{Arsin}\frac{z}{\gamma}$$

$$= \operatorname{Arsin}\left(\frac{1}{\gamma}\left(\alpha x+\frac{\beta}{x}\right)\right)+c$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.4. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

α) $\int \frac{\sqrt{\alpha^2-x^2}}{x^2}\,dx$ β) $\int \frac{dx}{x\sqrt{\alpha^2-x^2}}$

γ) $\int \frac{x^2}{\sqrt{\alpha^2-x^2}}\,dx$ δ) $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}}$

1.5. Επίσης τα ολοκληρώματα:

α) $\int \sqrt{\alpha^2+x^2}\,dx$ β) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{\alpha^2+x^2}}$

γ) $\int \frac{x^{2\nu}}{(\alpha^2+x^2)^{\nu+(3/2)}}\,dx$ δ) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^4}}$

1.6. Όμοια τα ολοκληρώματα:

α) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-\alpha^2)^3}}$ β) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$

1.7. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$ β) $\int (\cos x-\sin x)\sqrt{\sin x+\cos x}\,dx$

γ) $\int \frac{e^{\alpha \operatorname{Arsin} x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ δ) $\int \frac{e^{\alpha \operatorname{Artg} x}}{1+x^2}\,dx$

1.8. Χρησιμοποιώντας κατάλληλη αντικατάσταση να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $\displaystyle\int tg\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^2}$ β) $\displaystyle\int\frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx$

γ) $\displaystyle\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)e^{x+(1/x)}dx$ δ) $\displaystyle\int\frac{\sin x}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\cos x}}\,dx$

ε) $\displaystyle\int\frac{\alpha x^2-\beta}{x^2+(\alpha x^2+\beta)^2}\,dx$ στ) $\displaystyle\int\sqrt{2\alpha x-x^2}\,dx$

1.9. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα, με την αντικατάσταση που δίνεται δίπλα στο καθένα:

α) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}}$, $\alpha<x<\beta$ $x=\alpha\cos^2\theta+\beta\sin^2\theta$

β) $\displaystyle\int\frac{\log(x+1)-\log x}{x(x+1)}\,dx$, $\log\left(1+\frac{1}{x}\right)=t$

γ) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$, $x=\sin^2\theta$

δ) $\displaystyle\int x\sqrt{\frac{\alpha-x}{\alpha+x}}\,dx$, $x=\alpha\cos2\theta$

§ 1.3. Β΄ ΠΑΡΑΓΟΝΤΙΚΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ

Θεώρημα 1.4. Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες σε ένα διάστημα Δ και η συνάρτηση $f'g$ έχει αόριστο ολοκλήρωμα στο Δ, τότε και η fg' έχει αόριστο ολοκλήρωμα στο Δ και ισχύει:

$$\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx,\ x\in\Delta$$

Απόδειξη

Παρατηρούμε ότι:

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx]=\frac{d}{dx}[f(x)g(x)]-\frac{d}{dx}\int f'(x)g(x)dx$$

$$=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)-f'(x)g(x)=f(x)g'(x)$$

Από τον ορισμό 1.1 το θεώρημα είναι προφανές.■

Παρατήρηση 1.10.

Ο τύπος της παραγοντικής ολοκλήρωσης γράφεται για ευκολία ως εξής:

$$\int u d\upsilon=u\cdot\upsilon-\int \upsilon du$$

Για να χρησιμοποιήσουμε αυτόν τον τύπο πρέπει να έχουμε την συνάρτηση μέσα στο ολοκλήρωμα, ως γινόμενο δυο παραγόντων: μιας συναρτήσεως και του διαφορικού μιας άλλης συναρτήσεως.

Παράδειγμα 1.15.

Ας θεωρήσουμε το ολοκλήρωμα: $\int xe^{x}dx$, $x\in\mathbb{R}$ θέτουμε:

$$u=x \quad \text{και} \quad d\upsilon=e^{x}dx$$

Τότε $du=dx$ και $\upsilon=\int e^{x}dx=e^{x}$. Συνεπώς

$$\int xe^{x}dx=\int xde^{x}=xe^{x}-\int e^{x}dx=xe^{x}-e^{x}+c.$$

Παράδειγμα 1.16.

Έστω $I=\int x^{2}\cos xdx$, $x\in\mathbb{R}$. Θέτουμε:

$$u=x^{2} \quad \text{και} \quad d\upsilon=\cos xdx$$

Τότε $du=2xdx$ και $\upsilon=\int\cos xdx=\sin x$. Συνεπώς

$$I=\int x^{2}\cos xdx=\int x^{2}d\sin x=x^{2}\sin x-2\int x\cdot\sin xdx=x^{2}\sin x-2I_{1}$$

Το I_1 υπολογίζεται πάλι με παραγοντική ολοκλήρωση

$$I_{1}=\int x\sin xdx=-\int xd\cos x=-x\cos x+\int\cos xdx=-x\cos x+\sin x$$

Άρα

$$I=\int x^{2}\cos xdx=x^{2}\sin x+2x\cos x-2\sin x+c.$$

Παρατήρηση 1.11.

Στο προηγούμενο παράδειγμα στις επί μέρους ολοκληρώσεις παραλείψαμε τις σταθερές και την προσθέσαμε μόνο στο τελικό αποτέλεσμα. Υποτίθεται ότι σ'αυτήν περιέχονται όλες οι επί μέρους σταθερές. Όπως δείχνει το επόμενο παράδειγμα, η σταθερή ολοκλήρωσης δεν μπορεί να παραλειφθεί.

Παράδειγμα 1.17.

Αν $I=\int \frac{1}{x}dx$ τότε εφαρμόζοντας παραγοντική ολοκλήρωση, θεωρώντας το 1 σαν δεύτερη συνάρτηση έχουμε:

$$I=\int \frac{1}{x}\,dx=\frac{1}{x}\cdot x-\int x d\frac{1}{x}=1-\int x\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx$$

$$=1+\int \frac{1}{x}dx=1+I$$

δηλ. 0=1!! Το παράδοξο οφείλεται στην παράλειψη της σταθερής.

Παρατήρηση 1.12.

Μπορεί μετά από μια ή περισσότερες εφαρμογές της παραγοντικής ολοκλήρωσης να καταλήξουμε στο ολοκλήρωμα από το οποίο ξεκινήσαμε. Τότε το ολοκλήρωμα υπολογίζεται εύκολα θεωρώντας την παράσταση ως εξίσωση με άγνωστο το ολοκλήρωμα.

Παράδειγμα 1.18.

Έχουμε:

$$I=\int e^x\sin x dx=-\int e^x d\cos x=-e^x\cos x+\int e^x\cos x dx=-e^x\cos x+\int e^x d\sin x$$

$$=-e^x\cos x+e^x\sin x-\int e^x\sin x dx=-e^x\cos x+e^x\sin x-I$$

Συνεπώς: $I=\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+c.$

Παράδειγμα 1.19.

Το ολοκλήρωμα $\int\sqrt{a^2-x^2}dx$ έχουμε δει πως υπολογίζεται (περίπτωση 1η της §1.2). Μπορεί όμως να υπολογιστεί και με παραγοντική ολοκλήρωση ως εξής:

$$\int\sqrt{\alpha^2-x^2}dx=x\sqrt{\alpha^2-x^2}-\int x\frac{-x}{\sqrt{\alpha^2-x^2}}dx=x\sqrt{\alpha^2-x^2}+\int\frac{x^2}{\sqrt{\alpha^2-x^2}}dx$$

$$=x\sqrt{\alpha^2-x^2}+\int\frac{\alpha^2-(\alpha^2-x^2)}{\sqrt{\alpha^2-x^2}}dx$$

(Προσέξτε αυτό το βήμα. Τέτοιοι μετασχηματισμοί είναι συχνά αναγκαίοι)

$$=x\sqrt{\alpha^2-x^2}+\alpha^2\text{Arsin}\frac{x}{|\alpha|}-\int\sqrt{\alpha^2-x^2}dx$$

Συνεπώς:

$$\int\sqrt{\alpha^2-x^2}dx=\frac{x\sqrt{\alpha^2-x^2}}{2}+\frac{\alpha^2}{2}\text{Arsin}\frac{x}{|\alpha|}+c.$$

Παρατήρηση 1.13.

Με παραγοντική ολοκλήρωση υπολογίζονται τα ολοκληρώματα που έχουν μια από τις παρακάτω μορφές:

ΜΟΡΦΗ Α΄. $I_A=\int P(x)e^{\alpha x}dx$, $\alpha\in\mathbb{R}$ και $P(x)$ πολυώνυμο του x.

ΜΕΘΟΔΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ

$$I_A=\int P(x)e^{\alpha x}dx=\frac{1}{\alpha}\int P(x)de^{\alpha x}=\frac{1}{\alpha}P(x)e^{\alpha x}-\frac{1}{\alpha}\int e^{\alpha x}P'(x)dx$$

Παράδειγμα 1.20.

Είναι:

$$\int(x^2+1)e^{-2x}dx=-\frac{1}{2}\int(x^2+1)de^{-2x}=-\frac{1}{2}(x^2+1)e^{-2x}+\frac{1}{2}\int e^{-2x}\cdot 2xdx$$

$$=-\frac{1}{2}(x^2+1)e^{-2x}-\frac{1}{2}\int xde^{-2x}=-\frac{1}{2}(x^2+1)e^{-2x}-\frac{1}{2}xe^{-2x}$$

$$+\frac{1}{2}\int e^{-2x}dx=-\frac{1}{4}e^{-2x}(2x^2+2x+3)+c$$

Παρατήρηση 1.14.

Όταν υπολογίζουμε ένα ολοκλήρωμα της μορφής $\int P(x)e^{\alpha x}dx$ παίρνουμε σαν συμπέρασμα μια συνάρτηση της μορφής $Q(x)e^{\alpha x}$ όπου $Q(x)$ ένα πολυώνυμο του ίδιου βαθμού με το $P(x)$.

Η παρατήρηση αυτή μας οδηγεί σε μια διαφορετική μέθοδο υπολογισμού των παραπάνω ολοκληρωμάτων, γνωστή ως "μ έ θ ο δ ο ς των προσδιοριστέων συντελεστών", που αναλύεται στο επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 1.21.

Θα έχουμε:

$$\int (x^3-2x^2+1)e^{2x}dx=(Ax^3+Bx^2+\Gamma x+\Delta)e^{2x}+c$$

Με παραγώγιση και των δυο μελών αυτής της ισότητας παίρνουμε:

$$(x^3-2x^2+1)e^{2x}=(3Ax^2+2Bx+\Gamma)e^{2x}+2(Ax^3+Bx^2+\Gamma x+\Delta)e^{2x}$$

ή

$$x^3-2x^2+1=2Ax^3+(3A+2B)x^2+(2B+2\Gamma)x+\Gamma+2\Delta$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των ίσων δυνάμεων του x, παίρνουμε:

$$\begin{gathered}2A=1\\3A+2B=-2\\2B+2\Gamma=0\\\Gamma+2\Delta=1\end{gathered}$$

Από το σύστημα αυτό παίρνουμε: $A=\frac{1}{2}$, $B=-\frac{7}{4}$, $\Gamma=\frac{7}{4}$, $\Delta=-\frac{3}{8}$. Άρα:

$$\int (x^3-2x^2+1)e^{2x}dx=\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{7}{4}x^2+\frac{7}{4}x-\frac{3}{8}\right)e^{2x}+c.$$

ΜΟΡΦΗ Β΄. $I_B=\int P(x)\begin{matrix}\cos(\alpha x+\beta)\\\sin(\alpha x+\beta)\end{matrix}dx, \alpha,\beta\in\mathbb{R}$ και $P(x)$ πολυώνυμο του x.

ΜΕΘΟΔΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ

$$I_B=\int P(x)\,\frac{1}{\alpha}\,d\begin{matrix}\sin(\alpha x+\beta)\\-\cos(\alpha x+\beta)\end{matrix}$$

$$=\frac{1}{\alpha}P(x)\begin{matrix}\sin(\alpha x+\beta)\\-\cos(\alpha x+\beta)\end{matrix}\mp\frac{1}{\alpha}\int\begin{matrix}\sin(\alpha x+\beta)\\\cos(\alpha x+\beta)\end{matrix}P'(x)dx$$

Παράδειγμα 1.22.

Για το ολοκλήρωμα $I=\int(x^2-1)\cos3x\,dx$ έχουμε:

$$I=\frac{1}{3}\int(x^2-1)d\sin3x=\frac{1}{3}(x^2-1)\sin3x-\frac{1}{3}\int\sin3x\cdot2x\,dx$$

$$=\frac{1}{3}(x^2-1)\sin3x+\frac{2}{9}\int x\,d\cos3x=\frac{1}{3}(x^2-1)\sin3x+\frac{2}{9}x\cos3x-\frac{2}{9}\int\cos3x\,dx$$

$$=\frac{1}{3}(x^2-1)\sin3x+\frac{2}{9}x\cos3x-\frac{2}{27}\sin3x+c.$$

Παρατήρηση 1.15.

Και τα ολοκληρώματα της μορφής αυτής μπορούν να υπολογιστούν με την μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών (Παρατήρηση 1.14). Ας υπολογίσουμε με αυτή τη μέθοδο το προηγούμενο ολοκλήρωμα. Θέτουμε:

$$\int(x^2-1)\cos3x\,dx=(A_0x^2+A_1x+A_2)\cos3x+(B_0x^2+B_1x+B_2)\sin3x+c$$

Παραγωγίζοντας και τα δυο μέλη και εξισώνοντας τους συντελεστές των ίσων δυνάμεων του x, σε κάθε αγκύλη που πολλαπλασιάζεται με $\cos3x$ και $\sin3x$, έχουμε:

$$(x^2-1)\cos3x=[3B_0x^2+(2A_0+3B_1)x+A_1+3B_2]\cos3x$$

$$+[-3A_0x^2+(2B_0-3A_1)x+B_1-3A_2]\sin3x$$

$$3B_0=1,\ 2A_0+3B_1=0,\ A_1+3B_2=-1,\ -3A_0=0,\ 2B_0-3A_1=0,\ B_1-3A_2=0$$

$$A_0=0,\ A_1=\frac{2}{9},\ A_2=0,\ B_0=\frac{1}{3},\ B_1=0,\ B_2=-\frac{11}{27}$$

Άρα:

$$\int(x^2-1)\cos3x\,dx=\frac{2}{9}x\cos3x+\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{11}{27}\right)\sin3x+c.$$

ΜΟΡΦΗ Γ'. $I_\Gamma=\int e^{kx}\begin{matrix}\sin(\alpha x+\beta)\\ \cos(\alpha x+\beta)\end{matrix}dx,\ k,\alpha,\beta\in\mathbb{R},\ k,\alpha\neq0$

1η ΜΕΘΟΔΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ

Έστω $I_\alpha=\int e^{kx}\sin(\alpha x+\beta)dx$ και $I_\beta=\int e^{kx}\cos(\alpha x+\beta)dx$. Τότε για το I_α εφαρμόζοντας παραγοντική ολοκλήρωση έχουμε:

$$I_\alpha=\int e^{kx}\sin(\alpha x+\beta)dx=-\frac{1}{\alpha}e^{kx}\cos(\alpha x+\beta)+\frac{k}{\alpha}\int e^{kx}\cos(\alpha x+\beta)dx$$

$$=-\frac{1}{\alpha}e^{kx}\cos(\alpha x+\beta)+\frac{k}{\alpha^2}e^{kx}\sin(\alpha x+\beta)-\frac{k^2}{\alpha^2}I_\alpha$$

Λύνοντας ως προς I_α παίρνουμε:

$$I_\alpha=\frac{k\sin(\alpha x+\beta)-\alpha\cos(\alpha x+\beta)}{k^2+\alpha^2}e^{kx}+c.$$

Όμοια βρίσκουμε:

$$I_\beta=\frac{k\cos(\alpha x+\beta)+\alpha\sin(\alpha x+\beta)}{k^2+\alpha^2}e^{kx}+c.$$

2η ΜΕΘΟΔΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ

Έχουμε:

$$I_\alpha=-\frac{1}{\alpha}e^{kx}\cos(\alpha x+\beta)+\frac{k}{\alpha}I_\beta \quad (1)$$

$$I_\beta=\frac{1}{\alpha}e^{kx}\sin(\alpha x+\beta)-\frac{k}{\alpha}I_\alpha \quad (2)$$

Λύνοντας το σύστημα των (1) και (2) βρίσκουμε τα I_α και I_β.

ΜΟΡΦΗ Δ'. $I_\Delta=\int P(x)e^{kx}\begin{matrix}\sin(\alpha x+\beta)\\ \cos(\alpha x+\beta)\end{matrix}dx$

ΜΕΘΟΔΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ

Θέτουμε $f(x)=\int e^{kx}\begin{matrix}\sin(\alpha x+\beta)\\ \cos(\alpha x+\beta)\end{matrix}dx$ που υπολογίστηκε στην προηγούμενη περίπτωση (Μορφή Γ). Τότε

$$I_\Delta=\int P(x)df(x)=P(x)f(x)-\int f(x)P'(x)dx$$

Παράδειγμα 1.23.

Θα υπολογίσουμε τα ολοκληρώματα: $I=\int xe^x\sin x dx$. Θέτουμε $f(x)=\int e^x\sin x dx$. Τότε από το Παράδειγμα 1.18 είναι $f(x)=\frac{e^x}{2}(\sin x-\cos x)$.

Συνεπώς:

$$I=\int x d\left\{\frac{e^x}{2}(\sin x-\cos x)\right\}=\frac{xe^x}{2}(\sin x-\cos x)-\frac{1}{2}\int e^x\sin x dx$$

$$+\frac{1}{2}\int e^x\cos x dx$$

$$=\frac{xe^x}{2}(\sin x-\cos x)-\frac{1}{2}\int e^x\sin x dx+\frac{1}{2}\int e^x d\sin x$$

$$=\frac{xe^x}{2}(\sin x-\cos x)-\frac{1}{2}\int e^x\sin x dx+\frac{1}{2}e^x\sin x-\frac{1}{2}\int e^x\sin x dx$$

$$=\frac{xe^x}{2}(\sin x-\cos x)+\frac{1}{2}e^x\cos x+c.$$

ΜΟΡΦΗ Ε΄. $I_{E_1}=\int e^{kx}\sin(\alpha x+\beta)\cos(\gamma x+\delta)dx$

$$I_{E_2}=\int e^{kx}\sin(\alpha x+\beta)\sin(\gamma x+\delta)dx$$

$$I_{E_3}=\int e^{kx}\cos(\alpha x+\beta)\cos(\gamma x+\delta)dx$$

ΜΕΘΟΔΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ

Ανάγονται στην μορφή Γ. χρησιμοποιώντας τους γνωστούς από την Τριγωνομετρία τύπους:

$$2\sin\alpha\cdot\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)$$

$$2\sin\alpha\cdot\cos\beta=\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$$

$$2\cos\alpha\cdot\cos\beta=\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$$

Παράδειγμα 1.24.

Έστω $I=\int e^x\sin 2x\cdot\cos x dx$.

Επειδή $\sin 2x\cdot\cos x=\frac{1}{2}(\sin 3x+\sin x)$ έχουμε:

$$I=\int e^x\sin 2x\cos x dx=\frac{1}{2}\int e^x\sin 3x dx+\frac{1}{2}\int e^x\sin x dx=\frac{1}{2}(I_1+I_2)$$

Αλλά

$I_1=\frac{1}{10}e^x(\sin 3x-3\cos 3x)$ (Μορφή Γ, I_α με $k=1$, $\alpha=3$, $\beta=0$)

$I_2=\frac{e^x}{2}(\sin x-\cos x)$ (Παράδειγμα 1.18)

Επομένως

$$I=\frac{1}{20}\ e^{x}(\sin 3x-3\cos 3x)+\frac{1}{4}e^{x}(\sin x-\cos x)+c.$$

Παρατήρηση 1.16.

Στην ειδική περίπτωση που $k=0,\ \beta=0,\ \delta=0$ βρίσκουμε εύκολα ότι:

1) $\displaystyle\int \sin\alpha x\cdot\cos\gamma x dx=\frac{-1}{2}\left\{\frac{\cos(\alpha+\gamma)x}{\alpha+\gamma}+\frac{\cos(\alpha-\gamma)x}{\alpha-\gamma}\right\}+c_1$

2) $\displaystyle\int \sin\alpha x\cdot\sin\gamma x dx=\frac{1}{2}\left\{\frac{\sin(\alpha-\gamma)x}{\alpha-\gamma}-\frac{\sin(\alpha+\gamma)x}{\alpha+\gamma}\right\}+c_2$

3) $\displaystyle\int \cos\alpha x\cdot\cos\gamma x dx=\frac{1}{2}\left\{\frac{\sin(\alpha+\gamma)x}{\alpha+\gamma}+\frac{\sin(\alpha-\gamma)x}{\alpha-\gamma}\right\}+c_3$

$$\boxed{\text{ΜΟΡΦΗ ΣΤ'.}\quad I_{ΣΤ}=\int f(x)\begin{matrix}\log\varphi(x)\\ \mathrm{Arsin}\varphi(x)\\ \mathrm{Arcos}\varphi(x)\\ \mathrm{Artg}\varphi(x)\end{matrix}\,dx}$$

ΜΕΘΟΔΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ

Υπολογίζουμε το αόριστο ολοκλήρωμα της f, έστω $F(x)=\int f(x)dx$. Τότε π.χ.

$$\int f(x)\log\varphi(x)dx=\int \log\varphi(x)dF(x)$$

$$=F(x)\log\varphi(x)-\int F(x)\,\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\,dx$$

Παράδειγμα 1.25.

Αν $I=\displaystyle\int\frac{\log x}{x^3}\,dx$ τότε επειδή $\displaystyle\int\frac{1}{x^3}\,dx=-\frac{1}{2x^2}$ θα έχουμε:

$$I=\int\frac{\log x}{x^3}\,dx=-\frac{1}{2}\int\log x\,d\frac{1}{x^2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}\log x+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$=-\frac{1}{2x^2}\log x-\frac{1}{4x^2}+c.$$

Παράδειγμα 1.26.

Θα υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα: $\displaystyle\int\frac{\mathrm{Arsin}x}{(1-x^2)^{3/2}}\,dx$

Από την άσκηση 1.46) είναι $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

Άρα

$$\int \frac{\text{Arsinx}}{(1-x^2)^{3/2}}\,dx = \int \text{Arsinx}\,d\,\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\text{Arsinx} - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\text{Arsinx} - \int \frac{x}{1-x^2}\,dx$$

$$= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\text{Arsinx} + \frac{1}{2}\log|1-x^2| + c.$$

ΜΟΡΦΗ Ζ΄. $\int \frac{f(x)}{\varphi^2(x)}\,dx$, δηλαδή ολοκληρώματα συναρτήσεων που έχουν τετράγωνο στον παρονομαστή.

ΜΕΘΟΔΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ

Βρίσκουμε την παράγωγο της $\frac{1}{\varphi}$ και μετασχηματίζουμε κατάλληλα το ολοκλήρωμα.

Παράδειγμα 1.27.

Έστω το ολοκλήρωμα: $I = \int \frac{xe^x}{(x+1)^2}\,dx.$

Είναι $\left(\frac{1}{x+1}\right)' = -\frac{1}{(x+1)^2}$. Άρα το I γράφεται:

$$I = \int xe^x d\left\{-\frac{1}{x+1}\right\} = -\frac{xe^x}{x+1} + \int \frac{1}{x+1}\,d(xe^x)$$

$$= -\frac{xe^x}{x+1} + \int \frac{1}{x+1}(x+1)e^x dx$$

$$= -\frac{xe^x}{x+1} + e^x = \frac{e^x}{x+1} + c.$$

Παρατήρηση 1.17.

Πολλές φορές είναι δυνατό για τον υπολογισμό ενός ολοκληρώματος να εφαρμόσουμε διαδοχικά παραγοντική ολοκλήρωση αρκετές φορές. Γενικά ισχύει ο παρακάτω τύπος, γνωστός ως "γενικευμένος τύπος της παραγοντικής ολοκλήρωσης":

$$\int u(x)\upsilon(x)dx=u(x)\upsilon_1(x)-u'(x)\upsilon_2(x)+u''(x)\upsilon_3(x)-\cdots$$

$$+(-1)^{\nu-1}u^{(\nu-1)}(x)\upsilon_\nu(x)-(-1)^{\nu-1}\int u^{(\nu)}(x)\upsilon_\nu(x)dx$$

όπου:

$$\upsilon_1(x)=\int \upsilon(x)dx,\ \upsilon_2(x)=\int \upsilon_1(x)dx,\ldots,\upsilon_\nu(x)=\int \upsilon_{\nu-1}(x)dx$$

με την προυπόθεση βέβαια ότι όλες οι παράγωγοι και τα ολοκληρώματα που εμφανίζονται υπάρχουν.

Για παράδειγμα είναι

$$\int P_\nu(x)e^{\alpha x}dx=P_\nu(x)\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}-P_\nu'(x)\frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2}+\cdots+(-1)^\nu P_\nu^{(\nu)}(x)\frac{e^{\alpha x}}{\alpha^{\nu+1}}$$

$$=e^{\alpha x}\left[\frac{P_\nu(x)}{\alpha}-\frac{1}{\alpha^2}P_\nu'(x)+\cdots+(-1)^\nu\frac{1}{\alpha^{\nu+1}}P_\nu^{(\nu)}(x)\right]+c$$

και

$$\int x^4\sin\alpha x dx=(x^4)\left(-\frac{\cos\alpha x}{\alpha}\right)-(4x^3)\left(-\frac{\sin\alpha x}{\alpha^2}\right)$$

$$+(4\cdot 3x^2)\left(\frac{\cos\alpha x}{\alpha^3}\right)-(4\cdot 3\cdot 2x)\left(\frac{\sin\alpha x}{\alpha^4}\right)$$

$$+(4\cdot 3\cdot 2\cdot 1)\left(-\frac{\cos x}{\alpha^5}\right)+c$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να υπολογίσετε το $\int \frac{3x^2-1}{2x\sqrt{x}}\mathrm{Artg}x dx$

Λύση

Είναι της μορφής ΣΤ'. Θα υπολογίσουμε πρώτα το

$$\int \frac{3x^2-1}{2x\sqrt{x}}dx=\int\left(\frac{3}{2}x^{1/2}-\frac{1}{2}x^{-3/2}\right)dx=x^{3/2}+x^{-(1/2)}=\frac{x^2+1}{\sqrt{x}}$$

Συνεπώς

$$\int \frac{3x^2-1}{2x\sqrt{x}}\mathrm{Artg}x dx=\int \mathrm{Artg}x d\frac{x^2+1}{\sqrt{x}}$$

$$=\frac{x^2+1}{\sqrt{x}}\mathrm{Artg}x-\int\frac{x^2+1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$=\frac{x^2+1}{\sqrt{x}}\mathrm{Artg}x-2\sqrt{x}+c.$$

2. Να υπολογίσετε το $\int e^{\sin x}\frac{x\cos^3x-\sin x}{\cos^2x}dx$

Λύση

$$\int e^{\sin x}\frac{x\cos^3x-\sin x}{\cos^2x}dx=\int e^{\sin x}\frac{x\cos^3x}{\cos^2x}dx-\int e^{\sin x}\frac{\sin x}{\cos^2x}dx$$

$$=\int e^{\sin x}\cdot x\cos x dx-\int e^{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{\cos^2x}dx$$

$$=\int x de^{\sin x}-\int e^{\sin x}d\frac{1}{\cos x}$$

$$=xe^{\sin x}-\int e^{\sin x}dx-\frac{e^{\sin x}}{\cos x}+\int\frac{1}{\cos x}e^{\sin x}\cos x$$

$$=xe^{\sin x}-\frac{e^{\sin x}}{\cos x}=e^{\sin x}\left(x-\frac{1}{\cos x}\right)+c$$

3. Να υπολογίσετε το $\int e^x\frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx$

Λύση

Είναι:

$$\int e^x\frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx=\int e^x\frac{1+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx$$

$$=\int e^x\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx+\int e^x\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}dx$$

$$\int u(x)\upsilon(x)dx=u(x)\upsilon_1(x)-u'(x)\upsilon_2(x)+u''(x)\upsilon_3(x)-\cdots$$

$$+(-1)^{\nu-1}u^{(\nu-1)}(x)\upsilon_\nu(x)-(-1)^{\nu-1}\int u^{(\nu)}(x)\upsilon_\nu(x)dx$$

όπου:

$$\upsilon_1(x)=\int\upsilon(x)dx,\ \upsilon_2(x)=\int\upsilon_1(x)dx,\ldots,\upsilon_\nu(x)=\int\upsilon_{\nu-1}(x)dx$$

με την προυπόθεση βέβαια ότι όλες οι παράγωγοι και τα ολοκληρώματα που εμφανίζονται υπάρχουν.

Για παράδειγμα είναι

$$\int P_\nu(x)e^{\alpha x}dx=P_\nu(x)\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}-P_\nu'(x)\frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2}+\cdots+(-1)^\nu P_\nu^{(\nu)}(x)\frac{e^{\alpha x}}{\alpha^{\nu+1}}$$

$$=e^{\alpha x}\left[\frac{P_\nu(x)}{\alpha}-\frac{1}{\alpha^2}P_\nu'(x)+\cdots+(-1)^\nu\frac{1}{\alpha^{\nu+1}}P_\nu^{(\nu)}(x)\right]+c$$

και

$$\int x^4\sin\alpha x\,dx=(x^4)\left(-\frac{\cos\alpha x}{\alpha}\right)-(4x^3)\left(-\frac{\sin\alpha x}{\alpha^2}\right)$$

$$+(4\cdot3x^2)\left(\frac{\cos\alpha x}{\alpha^3}\right)-(4\cdot3\cdot2x)\left(\frac{\sin\alpha x}{\alpha^4}\right)$$

$$+(4\cdot3\cdot2\cdot1)\left(-\frac{\cos x}{\alpha^5}\right)+c$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να υπολογίσετε το $\int\frac{3x^2-1}{2x\sqrt{x}}\text{Artg}x\,dx$

Λύση

Είναι της μορφής ΣΤ'. Θα υπολογίσουμε πρώτα το

$$\int\frac{3x^2-1}{2x\sqrt{x}}dx=\int\left(\frac{3}{2}x^{1/2}-\frac{1}{2}x^{-3/2}\right)dx=x^{3/2}+x^{-(1/2)}=\frac{x^2+1}{\sqrt{x}}$$

Συνεπώς

$$\int\frac{3x^2-1}{2x\sqrt{x}}\text{Artg}x\,dx=\int\text{Artg}x\,d\frac{x^2+1}{\sqrt{x}}$$

$$=\frac{x^2+1}{\sqrt{x}}\text{Artg}x-\int\frac{x^2+1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$=\frac{x^2+1}{\sqrt{x}}\text{Artg}x-2\sqrt{x}+c.$$

2. Να υπολογίσετε το $\int e^{\sin x}\frac{x\cos^3x-\sin x}{\cos^2x}dx$

Λύση

$$\int e^{\sin x}\frac{x\cos^3x-\sin x}{\cos^2x}dx=\int e^{\sin x}\frac{x\cos^3x}{\cos^2x}dx-\int e^{\sin x}\frac{\sin x}{\cos^2x}dx$$

$$=\int e^{\sin x}\cdot x\cos x\,dx-\int e^{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{\cos^2x}dx$$

$$=\int x\,de^{\sin x}-\int e^{\sin x}d\frac{1}{\cos x}$$

$$=xe^{\sin x}-\int e^{\sin x}dx-\frac{e^{\sin x}}{\cos x}+\int\frac{1}{\cos x}e^{\sin x}\cos x\,dx$$

$$=xe^{\sin x}-\frac{e^{\sin x}}{\cos x}=e^{\sin x}\left(x-\frac{1}{\cos x}\right)+c$$

3. Να υπολογίσετε το $\int e^x\frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx$

Λύση

Είναι:

$$\int e^x\frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx=\int e^x\frac{1+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx$$

$$=\int e^x\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx+\int e^x\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}dx$$

$$=\int e^{x}d\,tg\frac{x}{2}+\int e^{x}tg\frac{x}{2}dx$$

$$=e^{x}tg\frac{x}{2}-\int e^{x}tg\frac{x}{2}\,dx+\int e^{x}tg\frac{x}{2}\,dx$$

$$=e^{x}tg\frac{x}{2}+c.$$

4. Να υπολογίσετε τα

$$I_\alpha=\int e^{-2x}\cos^2 x dx \quad \text{και} \quad I_\beta=\int e^{-2x}\sin^2 x dx$$

Λύση

Τα ολοκληρώματα αυτά είναι της μορφής Γ΄ και υπολογίζονται κατά τα γνωστά. Πιο εύκολα όμως μπορούν να υπολογιστούν ως εξής:

Προσθέτοντας κατά μέλη τα I_α και I_β έχουμε:

$$I_\alpha+I_\beta=\int e^{-2x}(\cos^2x+\sin^2x)dx=\int e^{-2x}dx=-\frac{1}{2}e^{-2x} \qquad (1)$$

Αφαιρώντας το I_β από το I_α έχουμε:

$$I_\alpha-I_\beta=\int e^{-2x}(\cos^2x-\sin^2x)dx=\int e^{-2x}\cos 2x dx$$

$$=\frac{1}{4}e^{-2x}(\sin 2x-\cos 2x) \qquad (2)$$

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2) έχουμε:

$$I_\alpha=-\frac{1}{4}e^{-2x}+\frac{1}{8}e^{-2x}(\sin 2x-\cos 2x)+c_1$$

$$I_\beta=-\frac{1}{4}e^{-2x}-\frac{1}{8}e^{-2x}(\sin 2x-\cos 2x)+c_2$$

Σημείωση

Αν δοθεί ένα από τα I_α και I_β τότε θεωρούμε και το αντίστοιχο I_β ή I_α.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.10. Να υπολογίσετε τα:

α) $\int x\cos x dx$ β) $\int \log x dx$

γ) $\int Artg x dx$ δ) $\int \frac{x}{\cos^2 x}dx$

1.11. Επίσης τα:

α) $\int (Arsin x)^2 dx$ β) $\int \sqrt{A+x^2}dx$

γ) $\int \cos(\log x)dx$ δ) $\int \log(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})dx$

1.12. Να υπολογίσετε τα:

α) $\int (x^2-2x+5)e^{-x}dx$ β) $\int (3x^3-17)e^{2x}dx$

γ) $\int (x^2+3x+5)\cos 2x dx$ δ) $\int (1+x^2)^2\cos x dx$

1.13. Όμοια τα:

α) $\int x^2 e^x \sin x dx$ β) $\int x e^{\alpha x}\cos\beta x dx$

γ) $\int x e^x \sin^2 x dx$ δ) $\int e^{\alpha x}\cosh\alpha x\cdot\sin\beta x dx$

1.14. Να υπολογίσετε τα:

α) $\int x Artg x dx$ β) $\int \left(x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\log x dx$

γ) $\int \frac{Arsin x}{\sqrt{x+1}}dx$ δ) $\int \frac{x Arsin x}{(1-x^2)^{3/2}}dx$

ε) $\int \frac{e^{mArtg x}}{(1+x^2)^2}dx$ στ) $\int \frac{x Artg x}{\sqrt{1+x^2}}dx$

1.15. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$=\int e^{x}d\,tg\frac{x}{2}+\int e^{x}tg\frac{x}{2}dx$$

$$=e^{x}tg\frac{x}{2}-\int e^{x}tg\frac{x}{2}dx+\int e^{x}tg\frac{x}{2}dx$$

$$=e^{x}tg\frac{x}{2}+c.$$

4. Να υπολογίσετε τα

$$I_{\alpha}=\int e^{-2x}\cos^{2}x\,dx \quad \text{και} \quad I_{\beta}=\int e^{-2x}\sin^{2}x\,dx$$

Λύση

Τα ολοκληρώματα αυτά είναι της μορφής Γ΄ και υπολογίζονται κατά τα γνωστά. Πιο εύκολα όμως μπορούν να υπολογιστούν ως εξής:

Προσθέτοντας κατά μέλη τα I_{α} και I_{β} έχουμε:

$$I_{\alpha}+I_{\beta}=\int e^{-2x}(\cos^{2}x+\sin^{2}x)dx=\int e^{-2x}dx=-\frac{1}{2}e^{-2x} \qquad (1)$$

Αφαιρώντας το I_{β} από το I_{α} έχουμε:

$$I_{\alpha}-I_{\beta}=\int e^{-2x}(\cos^{2}x-\sin^{2}x)dx=\int e^{-2x}\cos 2x\,dx$$

$$=\frac{1}{4}e^{-2x}(\sin 2x-\cos 2x) \qquad (2)$$

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2) έχουμε:

$$I_{\alpha}=-\frac{1}{4}e^{-2x}+\frac{1}{8}e^{-2x}(\sin 2x-\cos 2x)+c_{1}$$

$$I_{\beta}=-\frac{1}{4}e^{-2x}-\frac{1}{8}e^{-2x}(\sin 2x-\cos 2x)+c_{2}$$

Σημείωση

Αν δοθεί ένα από τα I_{α} και I_{β} τότε θεωρούμε και το αντίστοιχο I_{β} ή I_{α}.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.10. Να υπολογίσετε τα:

α) $\int x\cos x\,dx$ β) $\int \log x\,dx$

γ) $\int Artg x\,dx$ δ) $\int \frac{x}{\cos^{2}x}dx$

1.11. Επίσης τα:

α) $\int (Arsin x)^{2}dx$ β) $\int \sqrt{A+x^{2}}\,dx$

γ) $\int \cos(\log x)dx$ δ) $\int \log(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})dx$

1.12. Να υπολογίσετε τα:

α) $\int (x^{2}-2x+5)e^{-x}dx$ β) $\int (3x^{3}-17)e^{2x}dx$

γ) $\int (x^{2}+3x+5)\cos 2x\,dx$ δ) $\int (1+x^{2})^{2}\cos x\,dx$

1.13. Όμοια τα:

α) $\int x^{2}e^{x}\sin x\,dx$ β) $\int x e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx$

γ) $\int x e^{x}\sin^{2}x\,dx$ δ) $\int e^{\alpha x}\cosh\alpha x\cdot\sin\beta x\,dx$

1.14. Να υπολογίσετε τα:

α) $\int x\,Artg x\,dx$ β) $\int\left(x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^{2}}\right)\log x\,dx$

γ) $\int \frac{Arsin x}{\sqrt{x+1}}dx$ δ) $\int \frac{x\,Arsin x}{(1-x^{2})^{3/2}}dx$

ε) $\int \frac{e^{m\,Artg x}}{(1+x^{2})^{2}}dx$ στ) $\int \frac{x\,Artg x}{\sqrt{1+x^{2}}}dx$

1.15. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $\int \frac{x\sin x}{(1+\cos x)^2}\,dx$ β) $\int \frac{x^2e^x}{(x+2)^2}\,dx$

γ) $\int \frac{x^2}{(x\sin x+\cos x)^2}\,dx$ δ) $\int \frac{dx}{(1+x\,\mathrm{tg}x)^2}$

1.16. Επίσης τα ολοκληρώματα:

α) $\int x\log\frac{1-x}{1+x}\,dx$ β) $\int \sin\sqrt[3]{x}\,dx$

γ) $\int \mathrm{Arcos}\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,dx$ δ) $\int x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$

ε) $\int \mathrm{Arcos}\frac{1}{x}\,dx$ στ) $\int \frac{e^{m\,\mathrm{Artg}x}}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx$

ζ) $\int e^x\,\frac{1-\sin x}{1-\cos x}\,dx$ η) $\int \frac{\sin^2 x}{(x\cos x-\sin x)^2}\,dx$

θ) $\int \frac{\sqrt{x^2+1}\,[\log(x^2+1)-2\log x]}{x^4}\,dx$ ι) $\int \sin x\cdot\log(\mathrm{tg}x)\,dx$

§ 1.4. ΑΝΑΓΩΓΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ

Ο υπολογισμός του ολοκληρώματος μιας συναρτήσεως που είναι υψωμένη σε μια δύναμη, οδηγεί πολλές φορές σε ένα ολοκλήρωμα που είναι της ίδιας μορφής με το αρχικό, αλλά με μικρότερο εκθέτη. Έτσι παίρνουμε τους λεγόμενους **αναγωγικούς τύπους**, από τους οποίους με διαδοχικές εφαρμογές ανάγόμαστε σε γνωστά ολοκληρώματα.

Συνήθως για την εύρεση ή απόδειξη αναγωγικών τύπων εφαρμόζουμε παραγοντική ολοκλήρωση. Ας δούμε μερικά παραδείγματα:

Παράδειγμα 1.28.

Έστω $I_\nu=\int\frac{dx}{(\alpha^2+x^2)^\nu}$, $\nu\in\mathbb{N}$

Τότε:

$$I_1=\int\frac{dx}{\alpha^2+x^2}=\frac{1}{\alpha}\,\mathrm{Artg}\,\frac{x}{\alpha}\quad(\text{άσκηση } 1.3\delta)$$

ενώ για $\nu\geq 2$ έχουμε:

$$I_\nu=\int\frac{dx}{(\alpha^2+x^2)^\nu}=\frac{1}{\alpha^2}\int\frac{\alpha^2+x^2-x^2}{(\alpha^2+x^2)^\nu}dx=\frac{1}{\alpha^2}\int\frac{dx}{(\alpha^2+x^2)^{\nu-1}}-\frac{1}{\alpha^2}\int\frac{x^2}{(x^2+\alpha^2)^\nu}dx$$

$$=\frac{1}{\alpha^2}I_{\nu-1}-\frac{1}{\alpha^2}\int x\,\frac{x}{(\alpha^2+x^2)^\nu}dx$$

$$=\frac{1}{\alpha^2}I_{\nu-1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\alpha^2}\int x\,\frac{d(\alpha^2+x^2)}{(\alpha^2+x^2)^\nu}$$

$$=\frac{1}{\alpha^2}I_{\nu-1}-\frac{1}{2\alpha^2}\int x\,d\,\frac{(\alpha^2+x^2)^{1-\nu}}{1-\nu}$$

$$=\frac{1}{\alpha^2}I_{\nu-1}-\frac{1}{2\alpha^2}\;\frac{x}{(1-\nu)(\alpha^2+x^2)^{\nu-1}}+\frac{1}{2\alpha^2}\cdot\frac{1}{1-\nu}\int\frac{dx}{(\alpha^2+x^2)^{\nu-1}}$$

$$=\frac{1}{\alpha^2}I_{\nu-1}-\frac{1}{2\alpha^2}\cdot\frac{x}{(1-\nu)(\alpha^2+x^2)^{\nu-1}}+\frac{1}{2\alpha^2}\;\frac{1}{1-\nu}\,I_{\nu-1}$$

ή

$$I_\nu=\frac{1}{2(\nu-1)\alpha^2}\;\frac{x}{(\alpha^2+x^2)^{\nu-1}}+\frac{2\nu-3}{2(\nu-1)}\,\frac{1}{\alpha^2}\,I_{\nu-1},\quad\nu\geq 2$$

Έτσι έχουμε για παράδειγμα:

$$I_4=\frac{1}{6\alpha^2}\cdot\frac{x}{(\alpha^2+x^2)^3}+\frac{5}{6\alpha^2}\,I_3$$

$$=\frac{1}{6\alpha^2}\;\frac{x}{(\alpha^2+x^2)^3}+\frac{5}{6\alpha^2}\left[\frac{1}{4\alpha^2}\;\frac{x}{(\alpha^2+x^2)^2}+\frac{3}{4\alpha^2}\,I_2\right]$$

$$=\frac{1}{6\alpha^2}\,\frac{x}{(\alpha^2+x^2)^3}+\frac{5}{6\alpha^2}\left[\frac{1}{4\alpha^2}\,\frac{x}{(\alpha^2+x^2)^2}+\frac{3}{4\alpha^2}\left\{\frac{1}{2\alpha^2}\,\frac{x}{(\alpha^2+x^2)}+\frac{1}{2\alpha^2}\,I_1\right\}\right]$$

$$=\frac{1}{6\alpha^2}\,\frac{x}{(\alpha^2+x^2)^3}+\frac{5}{6\alpha^2}\left[\frac{1}{4\alpha^2}\,\frac{x}{(\alpha^2+x^2)^2}+\frac{3}{4\alpha^2}\left\{\frac{1}{2\alpha^2}\,\frac{x}{(\alpha^2+x^2)}+\frac{1}{2\alpha^3}\,\mathrm{Artg}\frac{x}{\alpha}\right\}\right]$$

Παράδειγμα 1.29.

Θα βρούμε αναγωγικό τύπο για το ολοκλήρωμα:

$$I_\nu=\int(\alpha^2-x^2)^\nu dx,\ \nu\in Q.$$

Εφαρμόζοντας παραγοντική ολοκλήρωση έχουμε:

$$I_\nu=x(\alpha^2-x^2)^\nu-\int x\nu(\alpha^2-x^2)^{\nu-1}(-2x)dx$$

$$=x(\alpha^2-x^2)^\nu+2\nu\int x^2(\alpha^2-x^2)^{\nu-1}dx$$

$$=x(\alpha^2-x^2)^\nu+2\nu\int(x^2-\alpha^2+\alpha^2)(\alpha^2-x^2)^{\nu-1}dx$$

$$=x(\alpha^2-x^2)^\nu-2\nu\int(\alpha^2-x^2)^\nu dx+2\nu\alpha^2\int(\alpha^2-x^2)^{\nu-1}dx$$

ή

$$I_\nu=\frac{1}{2\nu+1}\,x(\alpha^2-x^2)^\nu+\frac{2\nu\alpha^2}{2\nu+1}\,I_{\nu-1},\ \nu\in Q$$

Έτσι είναι:

$$I_{-1/2}=\int\frac{dx}{\sqrt{\alpha^2-x^2}}=\mathrm{Arsin}\frac{x}{\alpha}+c$$

$$I_{1/2}=\int\sqrt{\alpha^2-x^2}dx=\frac{x}{2}\sqrt{\alpha^2-x^2}+\frac{\alpha^2}{2}\,I_{-1/2}$$

$$=\frac{x}{2}\sqrt{\alpha^2-x^2}+\frac{\alpha^2}{2}\,\mathrm{Arsin}\frac{x}{\alpha}+c$$

$$I_{3/2}=\int(\alpha^2-x^2)^{3/2}dx=\frac{x}{4}(\alpha^2-x^2)^{3/2}+\frac{3}{4}\alpha^2 I_{1/2}\quad \text{κ.τ.λ.}$$

Παράδειγμα 1.30.

Θα βρούμε τέλος, αναγωγικό τύπο για το ολοκλήρωμα

$$I_{\mu,\nu}=\int x^\mu(\log x)^\nu dx,\ \mu\in Z-\{-1\},\ \nu\in\mathbb{N}$$

Έχουμε:

$$I_{\mu,\nu}=\int(\log x)^\nu d\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}=\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}(\log x)^\nu-\frac{\nu}{\mu+1}\int x^{\mu+1}(\log x)^{\nu-1}\frac{dx}{x}$$

$$=\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}(\log x)^\nu-\frac{\nu}{\mu+1}\int x^\mu(\log x)^{\nu-1}dx$$

Άρα

$$I_{\mu,\nu}=\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}(\log x)^\nu-\frac{\nu}{\mu+1}\,I_{\mu,\nu-1}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να βρήτε αναγωγικό τύπο για το ολοκλήρωμα:

$$I_\nu=\int e^{\alpha x}\cos^\nu\beta x\,dx,\ \nu\geq 2$$

Λύση

Έχουμε:

$$I_\nu=\int e^{\alpha x}\cos^\nu\beta x\,dx=\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}\cos^\nu\beta x+\int\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}\nu\beta\cos^{\nu-1}\beta x\sin\beta x\,dx$$

$$=\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}\cos^\nu\beta x+\frac{\nu\beta}{\alpha}\Big[\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}\cos^{\nu-1}\beta x\cdot\sin\beta x$$

$$-\int\frac{\beta}{\alpha}e^{\alpha x}\left\{\cos^\nu\beta x-(\nu-1)\cos^{\nu-2}\beta x\sin^2\beta x\right\}dx\Big]$$

$$=\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}\cos^\nu\beta x+\frac{\nu\beta}{\alpha}\Big[\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}\cos^{\nu-1}\beta x\cdot\sin\beta x$$

$$-\int\frac{\beta}{\alpha}e^{\alpha x}\left\{\nu\cos^\nu\beta x-(\nu-1)\cos^{\nu-2}\beta x\right\}dx\Big]$$

ή

$$\left(1+\frac{\nu^2\beta^2}{\alpha^2}\right)I_\nu=\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}\cos^\nu\beta x+\frac{\nu\beta}{\alpha^2}e^{\alpha x}\cos^{\nu-1}\beta x\sin\beta x+\nu(\nu-1)\frac{\beta^2}{\alpha^2}I_{\nu-2}$$

Επομένως έχουμε τον εξής αναγωγικό τύπο:

$$I_\nu=e^{\alpha x}\cos^{\nu-1}\beta x\,\frac{\alpha\cos\beta x+\nu\beta\sin\beta x}{\alpha^2+\nu^2\beta^2}+\frac{\nu(\nu-1)\beta^2}{\alpha^2+\nu^2\beta^2}I_{\nu-2}.$$

2. Παραγωγίζοντας την παράσταση $P=x^{\nu-1}(2\alpha x-x^2)^{3/2}$ να αποδείξετε ότι:

$$\int x^{\nu}\sqrt{2\alpha x-x^2}\,dx=-\frac{x^{\nu-1}}{\nu+2}(2\alpha x-x^2)^{3/2}+\alpha\frac{2\nu+1}{\nu+2}\int x^{\nu-1}\sqrt{2\alpha x-x^2}\,dx.$$

Απόδειξη

Έχουμε:

$$P'=(x^{\nu-1}(2\alpha x-x^2)^{3/2})'=(\nu-1)x^{\nu-2}(2\alpha x-x^2)^{3/2}+3x^{\nu-1}(\alpha-x)(2\alpha x-x^2)^{1/2}$$

$$=x^{\nu-2}(2\alpha x-x^2)^{1/2}[\alpha(2\nu+1)x-(\nu+2)x^2]$$

$$=\alpha(2\nu+1)x^{\nu-1}(2\alpha x-x^2)^{1/2}-(\nu+2)x^{\nu}(2\alpha x-x^2)^{1/2}$$

Από τον ορισμό 1.1 συνεπάγεται ότι:

$$\int[\alpha(2\nu+1)x^{\nu-1}(2\alpha x-x^2)^{1/2}-(\nu+2)x^{\nu}(2\alpha x-x^2)^{1/2}]dx=x^{\nu-1}(2\alpha x-x^2)^{3/2}$$

δηλ.

$$\alpha(2\nu+1)\int x^{\nu-1}(2\alpha x-x^2)^{1/2}dx-(\nu+2)\int x^{\nu}(2\alpha x-x^2)^{1/2}dx=x^{\nu-1}(2\alpha x-x^2)^{3/2}$$

που είναι και ο ζητούμενος αναγωγικός τύπος για το ολοκλήρωμα:

$$I_{\nu}=\int x^{\nu}\sqrt{2\alpha x-x^2}\,dx.$$

Σημείωση

Η παραπάνω μέθοδος είναι αρκετά χρήσιμη για την απόδειξη αναγωγικών τύπων. Αρκεί να παραγωγιστεί μια κατάλληλη συνάρτηση. Για εφαρμογή να αποδείξετε τους αναγωγικούς τύπους των παραδειγμάτων 1.28 και 1.29 θεωρώντας αντίστοιχα ως

$$P \text{ το } \frac{x}{(x^2+\alpha^2)^{\nu-1}} \text{ και } x(\alpha^2-x^2)^{\nu}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.17. Να βρήτε αναγωγικούς τύπους για τα ολοκληρώματα:

α) $A_{\nu}=\int x^{\nu}\alpha^{x}dx$

β) $B_{\nu}=\int x^{\nu}\sin kx\,dx$

γ) $\Gamma_{\nu}=\int\frac{x^{\nu}}{\sqrt{x^2+\alpha^2}}dx$

δ) $\Delta_{\nu}=\int e^{\alpha x}\sin^{\nu}\beta x\,dx$

ε) $\Theta_{\nu}=\int(\alpha+\beta x^{\rho})^{\nu}dx$

1.18. Να αποδείξετε ότι:

α) Αν $E_{\mu,\nu}=\int x^{\mu}(1+x^2)^{\nu/2}dx$ τότε:

$$(\mu+\nu+1)E_{\mu,\nu}=x^{\mu-1}(1+x^2)^{(\nu/2)+1}-(\mu-1)E_{\mu-2,\nu}$$

β) Αν $Z_{\mu,\nu}=\int\frac{x^{\mu}}{(\log x)^{\nu}}dx$ τότε:

$$(\nu-1)Z_{\mu,\nu}=-\frac{x^{\mu+1}}{(\log x)^{\nu-1}}+(\mu+1)Z_{\mu,\nu-1}$$

γ) Αν $X=x^2+\alpha x+\alpha^2$ τότε:

$$\int X^{(1/2)\nu}dx=\frac{2x+\alpha}{2(\nu+1)}X^{(1/2)\nu}+\frac{3\nu\alpha^2}{4(\nu+1)}\int X^{(1/2)\nu-1}dx$$

δ) $$\int(\alpha^2+x^2)^{\frac{2\nu+1}{2}}dx=\frac{x}{2(\nu+1)}(\alpha^2+x^2)^{\frac{2\nu+1}{2}}+\frac{2\nu+1}{2(\nu+1)}\alpha^2\int(\alpha^2+x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}dx$$

§ 1.5. ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΡΗΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Θα εξετάσουμε τώρα πως μπορούμε να βρούμε το αόριστο ολοκλήρωμα μιας ρητής συναρτήσεως, δηλαδή θα θεωρήσουμε ολοκληρώματα της μορφής

$$\int R(x)dx$$

όπου R μια ρητή συνάρτηση. Όπως είναι γνωστό η R γράφεται σαν πηλίκο δυο πολυωνύμων

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$$

όπου τα P και Q έχουν βαθμούς $m \geqslant 0$ και n αντίστοιχα. Έστω

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{\beta_0 x^m+\beta_1 x^{m-1}+\cdots+\beta_m}{\alpha_0 x^n+\alpha_1 x^{n-1}+\cdots+\alpha_n},\ \alpha_0,\beta_0 \neq 0$$

Τότε η R είναι συνεχής σε κάθε ανοιχτό διάστημα με άκρα τις πραγματικές ρίζες του παρονομαστή Q(x). Συνεπώς σε κάθε τέτοιο διάστημα θα έχει αόριστο ολοκλήρωμα (Παρατήρηση 1.3). Θα υποθέσουμε ότι τα P και Q έχουν πραγματικούς συντελεστές.

Αν $m \geqslant n$, τότε θα υπάρχουν P_1 και P_2 τέτοια ώστε:

$$P(x)=P_1(x)Q(x)+P_2(x)$$

για κάθε $x \in C$, όπου ο βαθμός του P_2 είναι μικρότερος του n. Άρα:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=P_1(x)+\frac{P_2(x)}{Q(x)},\ Q(x)\neq 0 \qquad (1)$$

Παρατηρούμε τώρα από την (1) ότι το αόριστο ολοκλήρωμα $\int P_1(x)dx$ υπάρχει (διαδοχικές εφαρμογές του τύπου 1 του πίνακα στοιχειωδών ολοκληρωμάτων). Λόγω της γραμμικότητας του αόριστου ολοκληρώματος, για να υπολογίσουμε το $\int R(x)dx$ αρκεί να θεωρήσουμε το ολοκλήρωμα $\int \frac{P_2(x)}{Q(x)}dx$. Αυτό σημαίνει ότι για τον υπολογισμό ολοκληρώματος ρητής συναρτήσεως η προσοχή μας θα στρέφεται σε εκείνες τις συναρτήσεις για τις οποίες είναι $m<n$

Έστω $Q(x)=\sum_{r=0}^{n}\alpha_r x^r$, $x \in C$ όπου οι συντελεστές α_r είναι πραγματικοί. Θα αναφέρουμε μερικά γνωστά πράγματα από την Άλγεβρα, και συγκεκριμένα από την θεωρία πολυωνύμων.

Πρώτα απ' όλα, σύμφωνα με το θεμελιώδες θεώρημα της Άλγεβρας (ή θεώρημα του D'Alembert) κάθε πολυώνυμο με βαθμό $\nu \geqslant 1$ και πραγματικούς συντελεστές, έχει τουλάχιστο μια ρίζα, πραγματική ή μιγαδική. Επίσης, κάθε πολυώνυμο με βαθμό $\nu \geqslant 1$ και πραγματικούς συντελεστές έχει ν ακριβώς ρίζες, από τις οποίες μερικές ή και όλες μπορούν να συμπίπτουν.

Τέλος αν ένα πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές έχει ρίζα τον μιγαδικό $z=\alpha+\beta i$, τότε θα έχει ως ρίζα και τον συζυγή του $\bar{z}=\alpha-\beta i$ και μάλιστα θα είναι της ίδιας πολλαπλότητας με τον z.

Σύμφωνα με τα παραπάνω το πολυώνυμο Q(x) μπορεί να γραφεί στην μορφή

$$Q(x)=\alpha_0\prod_{i=1}^{r}(x-\rho_i)\prod_{j=1}^{s}\{(x-z_j)(x-\bar{z}_j)\},\ x \in C$$

όπου οι ρίζες ρ_i $(i \leqslant r)$ είναι πραγματικές και οι ρίζες z_j και $\bar{z}_j$ $(j \leqslant s)$ δεν είναι πραγματικές. Προφανώς είναι $r+2s=n$. Αφού οι ρίζες ρ_i και z_j δεν είναι αναγκαίο να είναι διαφορετικές μεταξύ τους, το Q(x) μπορεί να πάρει την μορφή:

$$Q(x)=\alpha_0\prod_{i=1}^{\mu}(x-\rho_i)^{r_i}\prod_{j=1}^{\nu}\{(x-z_j)(x-\bar{z}_j)\}^{s_j}$$

$$=\alpha_0\prod_{i=1}^{\mu}(x-\rho_i)^{r_i}\prod_{j=1}^{\nu}\{x^2+2p_j x+q_j\}^{s_j},\ x \in C$$

όπου r_i και s_j είναι θετικοί ακέραιοι, τέτοιοι ώστε

$$\sum_{i=1}^{\mu}r_i+2\sum_{j=1}^{\nu}s_j=n,\ \mu \geqslant 0,\ \nu \geqslant 0$$

(Αν μ ή ν είναι μηδέν τότε το αντίστοιχο άθροισμα παραλείπεται, δηλ. ορίζεται να είναι μηδέν).

Επίσης είναι:

$$p_j=-\frac{1}{2}(z_j+\bar{z}_j) \quad \text{και} \quad q_j=z_j\bar{z}_j=|z_j|^2$$

Επομένως τα p_j είναι πραγματικοί και τα q_j πραγματικοί και θετικοί. Ακόμα παρατηρούμε ότι:

$$p_j^2-q_j=\frac{1}{4}(z_j-\bar{z}_j)^2<0$$

αφού το $z_j-\bar{z}_j$ είναι καθαρός φανταστικός.

Ύστερα από τα παραπάνω, αφού $m<n$ η $R(x)$ μπορεί να αναλυθεί σε απλά κλάσματα στην μορφή:

$$R(x)=\sum_{i=1}^{\mu}\left\{\sum_{k=1}^{r_i}\frac{A_{ik}}{(x-\rho_i)^k}\right\}+\sum_{j=1}^{\nu}\left\{\sum_{k=1}^{s_j}\frac{B_{jk}x+C_{jk}}{(x^2+2p_jx+q_j)^k}\right\} \qquad (2)$$

όπου οι συντελεστές A_{ik}, B_{jk}, C_{jk} είναι πραγματικοί.

Η (2) σημαίνει ότι το $Q(x)$ έχει ρίζες πραγματικές τις $\rho_1,\rho_2,\dots,\rho_\mu$ με πολλαπλότητες αντίστοιχα $r_1,r_2,\dots,r_\mu$ και μιγαδικές ρίζες $\alpha_1+\beta_1 i$, $\alpha_2+\beta_2 i,\dots,\alpha_\nu+\beta_\nu i$ με πολλαπλότητες αντίστοιχα $s_1,s_2,\dots,s_\nu$. Αναλυτικά γράφεται ως εξής:

$$\begin{aligned}R(x)=&\frac{A_{11}}{x-\rho_1}+\frac{A_{12}}{(x-\rho_1)^2}+\dots+\frac{A_{1r_1}}{(x-\rho_1)^{r_1}}\\
&+\frac{A_{21}}{x-\rho_2}+\frac{A_{22}}{(x-\rho_2)^2}+\dots+\frac{A_{2r_2}}{(x-\rho_2)^{r_2}}\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&+\frac{A_{\mu1}}{x-\rho_\mu}+\frac{A_{\mu2}}{(x-\rho_\mu)^2}+\dots+\frac{A_{\mu r_\mu}}{(x-\rho_\mu)^{r_\mu}}\\
&+\frac{B_{11}x+C_{11}}{x^2+2p_1x+q_1}+\dots+\frac{B_{1s_1}x+C_{1s_1}}{(x^2+2p_1x+q_1)^{s_1}}\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&+\frac{B_{\nu1}x+C_{\nu1}}{x^2+2p_\nu x+q_\nu}+\dots+\frac{B_{\nu s_\nu}x+C_{\nu s_\nu}}{(x^2+2p_\nu x+q_\nu)^{s_\nu}}\end{aligned}$$

Έτσι για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος ρητής συναρτήσεως έχουμε να αντιμετωπίσουμε ακόμα δυο προβλήματα:

Το πρώτο είναι ο προσδιορισμός των συντελεστών A_{ik}, B_{jk} και C_{jk} στην ανάλυση σε απλά κλάσματα (2) και το δεύτε-

ο ο υπολογισμός των ολοκληρωμάτων μετά τον προσδιορισμό των σταθερών, που θα είναι της μορφής:

$$\int\frac{A}{(x-\rho)^k}\,dx \qquad (3)$$

$$\int\frac{Bx+\Gamma}{(x^2+2px+q)^k}\,dx \quad (p^2-q<0) \qquad (4)$$

) Μέθοδοι προσδιορισμού των συντελεστών

Για τον προσδιορισμό των συντελεστών στην ανάλυση σε απλά κλάσματα, χρησιμοποιούμε μια από τις παρακάτω μεθόδους:

Μέθοδος 1η (της συγκρίσεως των συντελεστών) Απαλοίφουμε τους παρονομαστές και εξισώνουμε τους συντελεστές των ίδιων δυνάμεων του x. Προκύπτει τότε ένα γραμμικό σύστημα, η λύση του οποίου δίνει τους ζητούμενους συντελεστές.

Μέθοδος 2η (των χαρακτηριστικών τιμών) Μετά την απαλοιφή των παρονομαστών, στην ταυτότητα που θα προκύψει, αντικαθιστούμε το x με ειδικές τιμές (κυρίως τις ρίζες του παρονομαστή, αφού αυτές μηδενίζουν μερικούς παράγοντες).

Παρατήρηση 1.18.

Η ταυτότητα, μετά την απαλοιφή των παρονομαστών στην 2η μέθοδο προκύπτει με την υπόθεση ότι το x είναι διάφορο των ριζών του παρονομαστή. Εύλογα λοιπόν προκύπτει το ερώτημα: μπορούμε να αντικαταστήσουμε το x με τις ρίζες του παρονομαστή; Η απάντηση είναι "ναι" και αυτό μπορεί να αποδειχτεί με την βοήθεια της συνέχειας ή και πιο απλά από το εξής: Αν θεωρήσουμε το πολυώνυμο της διαφοράς στην ταυτότητα που θα προκύψει, τότε αυτό θα μηδενίζεται για όλες τις τιμές του x που είναι διαφορετικές από τις ρίζες του παρονομαστή. Επομένως θα έχει άπειρες ρίζες, δηλαδή περισσότερες από τον βαθμό του. Άρα θα είναι το μηδενικό πολυώνυμο και επομένως θα μηδενίζεται και όταν το x πάρει σαν τιμές τις ρίζες του παρονομαστή.

Παρατήρηση 1.19.

Στην περίπτωση που το $Q(x)$ έχει ρίζες πραγματικές και απλές, δηλ. $Q(x)=(x-\rho_1)(x-\rho_2)\cdots(x-\rho_\mu)$ τότε οι συντελεστές στην ανάλυση

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-\rho_1}+\frac{A_2}{x-\rho_2}+\cdots+\frac{A_\mu}{x-\rho_\mu} \tag{5}$$

υπολογίζονται και ως εξής:

Από την (5) έχουμε:

$$P(x)=A_1(x-\rho_2)\cdots(x-\rho_\mu)+A_2(x-\rho_1)(x-\rho_3)\cdots(x-\rho_\mu)+\cdots$$
$$+A_\mu(x-\rho_1)(x-\rho_2)\cdots(x-\rho_{\mu-1})$$

Θέτοντας $x=\rho_1$ έχουμε:

$$P(\rho_1)=A_1(\rho_1-\rho_2)(\rho_1-\rho_3)\cdots(\rho_1-\rho_\mu)$$

δηλ.

$$A_1=\frac{P(\rho_1)}{(\rho_1-\rho_2)(\rho_1-\rho_3)\cdots(\rho_1-\rho_\mu)}$$

ή

$$A_1=\frac{P(\rho_1)}{Q'(\rho_1)}$$

Όμοια βρίσκουμε $A_2=\dfrac{P(\rho_2)}{Q'(\rho_2)},\ldots,A_\mu=\dfrac{P(\rho_\mu)}{Q'(\rho_\mu)}$

Έτσι αν το $Q(x)$ έχει ρίζες πραγματικές και απλές $\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_\mu$ τότε οι συντελεστές στην ανάλυση σε απλά κλάσματα δίνονται από τον τύπο:

$$A_k=\frac{P(\rho_k)}{Q'(\rho_k)},\quad k=1,2,\ldots,\mu$$

β) Υπολογισμός των ολοκληρωμάτων (3) και (4)

Το ολοκλήρωμα (3) υπολογίζεται εύκολα. Είναι:

$$\int\frac{A}{(x-\rho)^k}\,dx=\begin{cases} A\log|x-\rho|, & x>\rho \text{ ή } x<\rho,\ k=1 \\ \dfrac{A}{1-k}\,\dfrac{1}{(x-\rho)^{k-1}}, & x>\rho \text{ ή } x<\rho,\ k>1 \end{cases}$$

Το ολοκλήρωμα (4) είναι πιο σύνθετο. Προσπαθούμε να εμφανίσουμε στον αριθμητή την παράγωγο του παρονομαστή. Επειδή $(x^2+2px+q)'=2x+2p$ υπάρχουν σταθερές λ και μ τέτοιες ώστε:

$$Bx+\Gamma=\lambda(2x+2p)+\mu \tag{6}$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές του x και τους σταθερούς όρους στην (6) βρίσκουμε:

$$\lambda=\frac{B}{2} \quad \text{και} \quad \mu=\Gamma-Bp$$

Άρα

$$\int\frac{Bx+\Gamma}{(x^2+2px+q)^k}\,dx=\int\frac{\frac{B}{2}(2x+2p)+\Gamma-Bp}{(x^2+2px+q)^k}\,dx$$

$$=\frac{B}{2}\int\frac{2x+2p}{(x^2+2px+q)^k}\,dx+(\Gamma-Bp)\int\frac{dx}{(x^2+2px+q)^k}$$

$$=\frac{B}{2}I_k+(\Gamma-Bp)J_k \tag{7}$$

Αλλά

$$I_k=\int\frac{2x+2p}{(x^2+2px+q)^k}\,dx=\begin{cases}\log(x^2+2px+q), & \text{αν } k=1\\ \dfrac{1}{1-k}\cdot\dfrac{1}{(x^2+2px+q)^{k-1}}, & \text{αν } k\geqslant 2\end{cases}$$

Επομένως μένει για υπολογισμό μόνο το J_k.

Επειδή $x^2+2px+q=(x+p)^2+q-p^2$, θέτοντας $x+p=\omega$ και $q-p^2=\alpha^2>0$ έχουμε:

$$J_1=\int\frac{dx}{x^2+2px+q}=\int\frac{dx}{(x+p)^2+q-p^2}=\int\frac{d\omega}{\omega^2+\alpha^2}$$

$$=\frac{1}{\alpha}\,\mathrm{Artg}\,\frac{\omega}{\alpha}=\frac{1}{\sqrt{q-p^2}}\,\mathrm{Artg}\,\frac{x+p}{\sqrt{q-p^2}},\quad x\in\mathbb{R}$$

και

$$J_k=\int\frac{dx}{(x^2+2px+q)^k}=\int\frac{d\omega}{(\omega^2+\alpha^2)^k}$$

$$=\frac{1}{2(k-1)\alpha^2}\,\frac{\omega}{(\omega^2+\alpha^2)^{k-1}}+\frac{2k-3}{2(k-1)\alpha^2}J_{k-1},\quad k\geqslant 2$$

(Παράδειγμα 1.28)

$$=\frac{1}{2(k-1)\alpha^2}\,\frac{x+p}{(x^2+2px+q)^{k-1}}+\frac{2k-3}{2(k-1)\alpha^2}J_{k-1}$$

Έτσι υπολογίστηκε σ'όλες τις περιπτώσεις και το ολο-
λήρωμα (4).

αρατήρηση 1.20.

Εξυπακούεται πως δεν πρέπει να απομνημονευτούν οι παραπάνω αναγω-
ικοί τύποι, αλλά να εφαρμόζεται σε κάθε μια από τις παρουσιαζόμενες πε-
ιπτώσεις, η μέθοδος με την οποία προκύπτει ο αναγωγικός τύπος.

αρατήρηση 1.21.

Υπολογίστηκε παραπάνω το $J_1=\int\frac{dx}{x^2+2px+q}$ όπου $p^2-q<0$. Με τον ί-
ιο τρόπο μπορεί να υπολογιστεί και το ολοκλήρωμα

$$\int\frac{dx}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$$

ε $\Delta>0$. Πραγματικά αφού

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left\{\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}\right\}$$

έτοντας $x+\frac{\beta}{2\alpha}=\frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}t$ βρίσκουμε

$$\int\frac{dx}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}=\frac{1}{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}\log\frac{|2\alpha x+\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}|}{|2\alpha x+\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}|}+c.$$

Το παραπάνω ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογιστεί και με ανάλυση σε α-
λά κλάσματα, γιατί αφού $\Delta>0$ το $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ θα έχει ρίζες πραγματι-
ές, έστω ρ_1,ρ_2, οπότε:

$$\int\frac{dx}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}=\frac{1}{\alpha}\int\frac{dx}{(x-\rho_1)(x-\rho_2)}=\frac{1}{\alpha(\rho_1-\rho_2)}\int\frac{dx}{x-\rho_1}+\frac{1}{\alpha(\rho_2-\rho_1)}\int\frac{dx}{x-\rho_2}$$

$$=\frac{1}{\alpha(\rho_1-\rho_2)}\log\frac{|x-\rho_1|}{|x-\rho_2|}+c.$$

αράδειγμα 1.31.

Έστω το ολοκλήρωμα $\int\frac{2x+3}{x^3+x^2-2x}dx$

πειδή $x^3+x^2-2x=x(x^2+x-2)=x(x-1)(x+2)$ θα έχουμε:

$$\frac{2x+3}{x(x-1)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{\Gamma}{x+2}$$

$$2x+3=A(x-1)(x+2)+Bx(x+2)+\Gamma x(x-1)$$

Για $x=0$ έχουμε $3=-2A\Rightarrow A=-\frac{3}{2}$

Για $x=1$ έχουμε $5=3B\Rightarrow B=\frac{5}{3}$

Για $x=-2$ έχουμε $-1=6\Gamma\Rightarrow\Gamma=-\frac{1}{6}$

Επίσης οι συντελεστές μπορούν να υπολογιστούν και με την μέθοδο
της Παρατήρησης 1.19 δηλ.

$$A=\frac{P(0)}{Q'(0)}=-\frac{3}{2},\quad B=\frac{P(1)}{Q'(1)}=\frac{5}{3},\quad \Gamma=\frac{P(-2)}{Q'(-2)}=-\frac{1}{6}$$

Έτσι

$$\int\frac{2x+3}{x^3+x^2-2x}dx=-\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x}+\frac{5}{3}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{6}\int\frac{dx}{x+2}$$

$$=-\frac{3}{2}\log|x|+\frac{5}{3}\log|x-1|-\frac{1}{6}\log|x+2|+c$$

σε διάστημα Δ ένα από τα παρακάτω:

$$(-\infty,-2),\ (-2,0),\ (0,1),\ (1,+\infty).$$

Παράδειγμα 1.32.

Ας υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $I=\int \frac{dx}{(x-1)(x^2+1)(x^2+4)^2}$. Έχουμε:

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+1)(x^2+4)^2} = \frac{A}{x-1}+\frac{Bx+\Gamma}{x^2+1}+\frac{\Delta x+E}{x^2+4}+\frac{Zx+H}{(x^2+4)^2}$$

ή

$$1 = A(x^2+1)(x^2+4)^2+(Bx+\Gamma)(x-1)(x^2+4)^2+(\Delta x+E)(x-1)(x^2+1)(x^2+4)$$
$$+(Zx+H)(x-1)(x^2+1)$$

Για $x=1$ έχουμε: $1=50A \Rightarrow A=\frac{1}{50}$

Για $x=i$ έχουμε: $1=(Bi+\Gamma)(i-1)\cdot 9$. Εξισώνοντας τα πραγματικά και φανταστικά μέρη παίρνουμε το σύστημα:

$$-B+\Gamma=0$$

$$-B-\Gamma=\frac{1}{9}$$

Εύκολα βρίσκουμε $B=\Gamma=-\frac{1}{18}$.

Για $x=2i$ έχουμε: $1=(2Zi+H)(2i-1)(-3)$ από την οποία εύκολα βρίσκουμε: $Z=H=\frac{1}{15}$.

Εξισώνοντας με το μηδέν τους συντελεστές του x^6 έχουμε $A+B+\Delta=0$ ή $\Delta=-\frac{1}{50}+\frac{1}{18}=\frac{8}{225}$.

Εξισώνοντας τέλος τους σταθερούς όρους έχουμε:

$$16A-16\Gamma-4E-H=1 \quad ή \quad E=\frac{8}{225}$$

Άρα

$$I=\frac{1}{50}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{18}\int\frac{x+1}{x^2+1}dx+\frac{8}{225}\int\frac{x+1}{x^2+4}dx+\frac{1}{15}\int\frac{x+1}{(x^2+4)^2}dx \quad (8)$$

Αλλά

$$\int\frac{dx}{x-1}=\log|x-1|$$

$$\int\frac{x+1}{x^2+1}dx=\int\frac{x}{x^2+1}dx+\int\frac{dx}{x^2+1}=\frac{1}{2}\log(x^2+1)+\operatorname{Artg}x$$

$$\int\frac{x+1}{x^2+4}dx=\int\frac{x}{x^2+4}dx+\int\frac{dx}{x^2+4}=\frac{1}{2}\log(x^2+4)+\frac{1}{2}\operatorname{Artg}\frac{x}{2}$$

$$\int\frac{x+1}{(x^2+4)^2}dx=\int\frac{x}{(x^2+4)^2}dx+\int\frac{dx}{(x^2+4)^2}$$

$$=-\frac{1}{2(x^2+4)}+\frac{1}{4}\int\frac{x^2+4-x^2}{(x^2+4)^2}dx$$

$$=-\frac{1}{2(x^2+4)}+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2+4}+\frac{1}{8}\int x\,d\frac{1}{x^2+4}$$

$$=-\frac{1}{2(x^2+4)}+\frac{1}{8}\operatorname{Artg}\frac{x}{2}+\frac{1}{8}\,\frac{x}{x^2+4}-\frac{1}{16}\operatorname{Artg}\frac{x}{2}$$

Αντικαθιστώντας στην (8) έχουμε τελικά:

$$I=\frac{1}{50}\log|x-1|-\frac{1}{36}\log(x^2+1)-\frac{1}{18}\operatorname{Artg}x+\frac{4}{225}\log(x^2+4)+\frac{4}{225}\operatorname{Artg}\frac{x}{2}$$

$$-\frac{1}{30}\,\frac{1}{x^2+4}+\frac{1}{120}\operatorname{Artg}\frac{x}{2}+\frac{1}{120}\,\frac{x}{x^2+4}-\frac{1}{240}\operatorname{Artg}\frac{x}{2}+c,\ x\in\Delta$$

όπου Δ το $(-\infty,1)$ ή $(1,+\infty)$.

Παράδειγμα 1.33.

Για το ολοκλήρωμα $\int\frac{x+1}{(x^2+4x+5)^2}dx$ επειδή $x^2+4x+5=(x+2)^2+1$ θέτοντας $x+2=\omega$ έχουμε:

$$\int\frac{x+1}{(x^2+4x+5)^2}dx=\int\frac{\omega-1}{(\omega^2+1)^2}d\omega=\int\frac{\omega}{(\omega^2+1)^2}d\omega-\int\frac{d\omega}{(\omega^2+1)^2}$$

$$=-\frac{1}{2(\omega^2+1)}-\int\frac{\omega^2+1-\omega^2}{(\omega^2+1)^2}d\omega$$

$$=-\frac{1}{2(\omega^2+1)}-\int\frac{d\omega}{\omega^2+1}+\int\omega\,d\frac{-1}{2(\omega^2+1)}$$

$$=-\frac{1}{2(\omega^2+1)}-\operatorname{Artg}\omega-\frac{\omega}{2(\omega^2+1)}+\frac{1}{2}\operatorname{Artg}\omega$$

$$=-\frac{\omega+1}{2(\omega^2+1)}-\frac{1}{2}\text{Artg}\omega$$

$$=-\frac{x+3}{2(x^2+4x+5)}-\frac{1}{2}\text{Artg}(x+2)+c,\ x\in\mathbb{R}$$

Παρατήρηση 1.22.

Υπάρχουν και μερικές ειδικές περιπτώσεις όπου οι συντελεστές στην ανάλυση σε απλά κλάσματα υπολογίζονται εύκολα. Αν της ρητής συναρτήσεως ο αριθμητής είναι περιττή συνάρτηση του x και ο παρονομαστής άρτια ή αντίστροφα, τότε η αντικατάσταση $x^2=y$, μετατρέπει τους δευτεροβάθμιους παράγοντες του x σε πρωτοβάθμιους ως προς y.

Παράδειγμα 1.34.

Το ολοκλήρωμα $I=\int\frac{x^3+3x}{(x^2-1)(x^2+1)^2}dx$ ανήκει στην προηγούμενη κατηγορία, αφού ο αριθμητής είναι περιττή συνάρτηση του x και ο παρονομαστής άρτια. Θέτοντας $x^2=y$ έχουμε:

$$I=\int\frac{x^3+3x}{(x^2-1)(x^2+1)^2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{x^2+3}{(x^2-1)(x^2+1)^2}2xdx=\frac{1}{2}\int\frac{y+3}{(y-1)(y+1)^2}dy$$

$$=\frac{1}{2}\int\left[\frac{1}{y-1}-\frac{1}{y+1}-\frac{1}{(y+1)^2}\right]dy$$

$$=\frac{1}{2}\log\left|\frac{y-1}{y+1}\right|+\frac{1}{2}\frac{1}{y+1}$$

$$=\frac{1}{2}\log\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right|+\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1}+c.$$

Παρατήρηση 1.23.

Αν το Q(x) έχει πολλαπλές ρίζες τότε το ολοκλήρωμα $\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx$ υπολογίζεται πιο γρήγορα με την λεγόμενη "μέθοδο των Hermite-Ostrogradski" η οποία έχει ως εξής:

Ισχύει η ταυτότητα:

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\frac{\Phi(x)}{Q_1(x)}+\int\frac{\Phi_1(x)}{Q_2(x)}dx \qquad (*)$$

όπου $Q_1(x)=\text{Μ.Κ.Δ}\{Q(x),Q'(x)\}$, $Q_2(x)=\frac{Q(x)}{Q_1(x)}$ και $\Phi(x)$, $\Phi_1(x)$ πολυώνυμα του x βαθμών αντίστοιχα $\text{βαθ}\Phi(x)\leqslant\text{βαθ}Q_1(x)-1$, $\text{βαθ}\Phi_1(x)\leqslant\text{βαθ}Q_2(x)-1$. Οι συντελεστές των πολυωνύμων $\Phi(x)$ και $\Phi_1(x)$ υπολογίζονται με παραγώγιση της ταυτότητας (*).

Παράδειγμα 1.35.

Έστω το ολοκλήρωμα $I=\int\frac{dx}{(x^3-1)^2}$

Έχουμε:

$$Q_1(x)=\text{Μ.Κ.Δ.}\{(x^3-1)^2,\ 6x^2(x^3-1)\}=x^3-1,\ \Phi(x)=Ax^2+Bx+\Gamma$$

$$Q_2(x)=x^3-1,\ \Phi_1(x)=\Delta x^2+Ex+Z.$$

Επομένως

$$\int\frac{dx}{(x^3-1)^2}=\frac{Ax^2+Bx+\Gamma}{x^3-1}+\int\frac{\Delta x^2+Ex+Z}{x^3-1}dx$$

Παραγωγίζοντας και τα δυο μέλη της ταυτότητας αυτής έχουμε:

$$\frac{1}{(x^3-1)^2}=\frac{(2Ax+B)(x^3-1)-3x^2(Ax^2+Bx+\Gamma)}{(x^3-1)^2}+\frac{\Delta x^2+Ex+Z}{x^3-1}$$

ή

$$1=(2Ax+B)(x^3-1)-3x^2(Ax^2+Bx+\Gamma)+(\Delta x^2+Ex+Z)(x^3-1)$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των ίσων δυνάμεων του x προκύπτει το σύστημα:

$$\Delta=0,\ E-A=0,\ Z-2B=0,\ -\Delta-3\Gamma=0,\ -2A-E=0,\ -B-Z=1.$$

Από το σύστημα αυτό έχουμε:

$$A=\Gamma=\Delta=E=0,\ B=-\frac{1}{3},\ Z=-\frac{2}{3}.$$

Άρα:

$$\int\frac{dx}{(x^3-1)^2}=-\frac{x}{3(x^3-1)}-\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x^3-1} \qquad (9)$$

Αρκεί λοιπόν να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\int\frac{dx}{x^3-1}$

Είναι

$$\frac{1}{x^3-1}=\frac{\Lambda}{x-1}+\frac{Mx+N}{x^2+x+1}$$

ή

$$1=\Lambda(x^2+x+1)+(Mx+N)(x-1)$$

Για $x=1$ έχουμε: $1=3\Lambda \Rightarrow \Lambda=\frac{1}{3}$

Για $x=i$ έχουμε: $1=\frac{1}{3}i+(Mi+N)(i-1) \quad M=-\frac{1}{3},\ N=-\frac{2}{3}$

Έτσι

$$\int\frac{dx}{x^3-1}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{3}\int\frac{x+2}{x^2+x+1}\,dx$$

$$=\frac{1}{3}\log|x-1|-\frac{1}{6}\log(x^2+x+1)-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{Artg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

Επομένως η (9) δίνει:

$$I=\int\frac{dx}{(x^3-1)^2}=-\frac{x}{3(x^3-1)}+\frac{1}{9}\log\frac{x^2+x+1}{(x-1)^2}+\frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{Artg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+c,\ x\in\Delta$$

όπου Δ ένα από τα διαστήματα $(-\infty,1)$ ή $(1,+\infty)$.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να υπολογίσετε το $\int\frac{dx}{1+x^4}$

Λύση

Επειδή $1+x^4=(x^4+2x^2+1)-2x^2=(x^2+1)^2-(\sqrt{2}x)^2=(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)$ θα έχουμε:

$$\frac{1}{x^4+1}=\frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{\Gamma x+\Delta}{x^2-\sqrt{2}x+1}$$

ή

$$1=(Ax+B)(x^2-\sqrt{2}x+1)+(\Gamma x+\Delta)(x^2+\sqrt{2}x+1)$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των ίδιων δυνάμεων του x παίρνουμε το κα-

ρακάτω γραμμικό σύστημα:

$$\begin{aligned}&A+\Gamma=0\\&-\sqrt{2}A+B+\sqrt{2}\Gamma+\Delta=0\\&A-\sqrt{2}B+\Gamma+\sqrt{2}\Delta=0\\&B+\Delta=1\end{aligned}$$

Η λύση του δίνει: $(A,B,\Gamma,\Delta)=\left(\frac{1}{2\sqrt{2}},\frac{1}{2},-\frac{1}{2\sqrt{2}},\frac{1}{2}\right)$

Επομένως το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\int\frac{dx}{1+x^4}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,dx-\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,dx$$

Αλλά

$$\int\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+\sqrt{2}+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,dx+\frac{\sqrt{2}}{2}\int\frac{dx}{x^2+\sqrt{2}x+1}$$

$$=\frac{1}{2}\log(x^2+\sqrt{2}x+1)+\frac{\sqrt{2}}{2}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\log(x^2+\sqrt{2}x+1)+\operatorname{Artg}(\sqrt{2}x+1)$$

Όμοια βρίσκουμε:

$$\int\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,dx=\frac{1}{2}\log(x^2-\sqrt{2}x+1)-\operatorname{Artg}(\sqrt{2}x-1)$$

Συνεπώς

$$\int\frac{dx}{1+x^4}=\frac{1}{4\sqrt{2}}\log\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{Artg}(x\sqrt{2}+1)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{Artg}(x\sqrt{2}-1)+c.$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\log\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{Artg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}+c.$$

2. Να αποδείξετε ότι το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}{(Ax^2+2Bx+\Gamma)^2}\,dx$$

είναι ρητή συνάρτηση αν ισχύει μια από τις σχέσεις:

i) $A\Gamma-B^2=0$ ή ii) $\alpha\Gamma+\gamma A=2\beta B$

Απόδειξη

i) Έστω ότι $A\Gamma-B^2=0$. Τότε ο παρονομαστής θα είναι της μορφής $A^2(x-\rho)^4$. Θέτοντας $x-\rho=\xi$ έχουμε:

$$\int \frac{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}{(Ax^2+2Bx+\Gamma)^2}\,dx=\int \frac{\alpha(\xi+\rho)^2+2\beta(\xi+\rho)+\gamma}{A^2\xi^4}\,d\xi$$

$$=\frac{\alpha}{A^2}\int\frac{d\xi}{\xi^2}+\frac{2\alpha\rho+2\beta}{A^2}\int\frac{d\xi}{\xi^3}+\frac{\alpha\rho^2+2\beta\rho+\gamma}{A^2}\int\frac{d\xi}{\xi^4}$$

$$=-\frac{\alpha}{A^2}\,\frac{1}{\xi}-\frac{\alpha\rho+\beta}{A^2\xi^2}-\frac{\alpha\rho^2+2\beta\rho+\gamma}{3A^2\xi^3}+c$$

που είναι ρητή συνάρτηση.

ii) Έστω τώρα ότι $\alpha\Gamma+\gamma A=2\beta B$. Υπάρχουν σταθερές λ, μ και ν τέτοιες ώστε:

$$\alpha x^2+2\beta x+\gamma=\lambda(Ax^2+2Bx+\Gamma)+(\mu x+\nu)(2Ax+2B) \qquad (1)$$

γιατί αν $A\Gamma-B^2\neq 0$ τότε τα $Ax^2+2Bx+\Gamma$ και η παράγωγός του $2Ax+2B$ είναι πρώτα μεταξύ τους. Εξισώνοντας τους συντελεστές των ίδιων δυνάμεων του x στην (1) έχουμε το σύστημα:

$$\begin{aligned} A\lambda+2A\mu &=\alpha\\ B\lambda+B\mu+A\nu &=\beta\\ \Gamma\lambda\quad+2B\nu &=\gamma \end{aligned}$$

Λύνοντας το σύστημα, λαμβάνοντας υπόψη ότι $\alpha\Gamma+\gamma A=2\beta B$, βρίσκουμε:

$$\lambda=\frac{-\alpha}{A};\ \mu=\frac{\alpha}{A},\ \nu=\frac{\beta}{A}.$$

Τότε:

$$\int \frac{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}{(Ax^2+2Bx+\Gamma)^2}\,dx=-\frac{\alpha}{A}\int\frac{dx}{Ax^2+2Bx+\Gamma}+\frac{1}{A}\int\frac{(\alpha x+\beta)(2Ax+2B)}{(Ax^2+2Bx+\Gamma)^2}\,dx$$

$$=-\frac{\alpha}{A}\int\frac{dx}{Ax^2+2Bx+\Gamma}-\frac{1}{A}\int(\alpha x+\beta)\,d\,\frac{1}{Ax^2+2Bx+\Gamma}$$

$$=-\frac{\alpha}{A}\int\frac{dx}{Ax^2+2Bx+\Gamma}-\frac{\alpha x+\beta}{A(Ax^2+2Bx+\Gamma)}+\frac{\alpha}{A}\int\frac{dx}{Ax^2+2Bx+\Gamma}$$

$$=-\frac{\alpha x+\beta}{A(Ax^2+2Bx+\Gamma)}+c.$$

δηλ. ρητή συνάρτηση.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.19. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

α) $\int\frac{dx}{x^2+3x-10}$ β) $\int\frac{dx}{x^2+2x+3}$

γ) $\int\frac{dx}{4-x^2-4x}$ δ) $\int\frac{dx}{x^2-\alpha^2}$, $\alpha<x$

ε) $\int\frac{dx}{\alpha^2-x^2}$, $x<\alpha$ στ) $\int\frac{9-7x}{x^2+12x+38}\,dx$

ζ) $\int\frac{x+1}{x^2+4x+5}\,dx$ η) $\int\frac{3x-1}{4x^2-4x+17}\,dx$

1.20. Επίσης τα:

α) $\int\frac{(x-1)^2}{x^2+2x+2}\,dx$ β) $\int\frac{x^3}{(x-\alpha)^2(x-\beta)}\,dx$

γ) $\int\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}\,dx$ δ) $\int\frac{x-5}{x^3-3x^2+4}\,dx$

ε) $\int\frac{dx}{(x^2+\alpha^2)(x^2+\beta^2)}$ στ) $\int\frac{x^2+2}{x(x^4-1)}\,dx$

ζ) $\int\frac{dx}{x^4+x^2+1}$ η) $\int\frac{x^2+1}{x^4-x^2+1}\,dx$

1.21. Όμοια τα:

α) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+2x+5)^2}$ β) $\displaystyle\int \frac{x+2}{(x^2+2x+2)^3}\,dx$

γ) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x(x^2+4)}\,dx$ δ) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4(x^3+1)^2}$

ε) $\displaystyle\int \frac{(x^2-1)^2}{(1+x)(1+x^2)^3}\,dx$ στ) $\displaystyle\int \frac{3x^4+4}{x^2(1+x^2)^3}\,dx$

§ 1.6. ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΑΡΡΗΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Μερικοί τύποι ολοκληρωμάτων αλγεβρικών άρρητων παραστάσεων ανάγονται, με κατάλληλη αντικατάσταση, σε ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων. Θα παρουσιάσουμε σ'αυτή την παράγραφο διάφορες περιπτώσεις τέτοιων ολοκληρωμάτων.

ΜΟΡΦΗ Α΄. $\displaystyle\int R\left(x,\ \sqrt[\nu]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)dx$

όπου R ρητή συνάρτηση των μεταβλητών της, $\nu \in \mathbb{N}-\{1\}$, $\alpha\delta \neq \gamma\beta$ και $\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta} > 0$ αν ν άρτιος.

ΜΕΘΟΔΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ

Θέτουμε $\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta} = t^\nu$. Τότε $x=\dfrac{\beta-\delta t^\nu}{\gamma t^\nu-\alpha}$, $dx=\dfrac{\nu(\alpha\delta-\beta\gamma)t^{\nu-1}}{(\alpha-\gamma t^\nu)^2}\,dt$

και το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\int R\left(x,\ \sqrt[\nu]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)dx=\nu(\alpha\delta-\beta\gamma)\int R\left(\frac{\beta-\delta t^\nu}{\gamma t^\nu-\alpha},t\right)\frac{t^{\nu-1}}{(\alpha-\gamma t^\nu)^2}\,dt$$

Παράδειγμα 1.36.

Έστω το ολοκλήρωμα $I=\displaystyle\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,dx$

Θέτουμε $\dfrac{x+1}{x-1}=t^3$. Τότε $x=\dfrac{1+t^3}{t^3-1}$ και $dx=-\dfrac{6t^2}{(t^3-1)^2}\,dt$ και το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$I=\int \frac{-6t^3}{(t^3-1)^2}\,dt=2\int t\,d\frac{1}{t^3-1}=\frac{2t}{t^3-1}-2\int\frac{dt}{t^3-1}$$

$$=\frac{2t}{t^3-1}-\frac{2}{3}\int\frac{dt}{t-1}+\frac{2}{3}\int\frac{t+2}{t^2+t+1}\,dt$$

$$=\frac{2t}{t^3-1}+\frac{1}{3}\log\frac{t^3-1}{(t-1)^2}+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{Artg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+c$$

Αντικαθιστώντας το $t=\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}$ έχουμε το αποτέλεσμα συναρτήσει του x.

ΜΟΡΦΗ Β΄. $\displaystyle\int R\left(x,\ \sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}},\ \sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}},\dots\right)dx$

όπου R ρητή συνάρτηση των μεταβλητών της, $\alpha\delta \neq \gamma\beta, m, n, \dots \in \mathbb{N}$

ΜΕΘΟΔΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ

Θέτουμε $\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}=t^\rho$, όπου ρ το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των m,n....

Παράδειγμα 1.37.

Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $I=\displaystyle\int\frac{x}{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+1}}\,dx$, θέτουμε $x+1=t^6$, οπότε:

$$I=\int\frac{(t^6-1)6t^5}{t^3-t^2}\,dt=6\int(t^8+t^7+t^6+t^5+t^4+t^3)dt$$

$$=\frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1}+\frac{3}{4}(x+1)\sqrt[3]{x+1}+\frac{6}{7}(x+1)\sqrt[6]{x+1}+x+1+\frac{6}{5}\sqrt[6]{(x+1)^5}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2}+c.$$

ΜΟΡΦΗ Γ΄. $\displaystyle\int R(x,\ \sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma})\,dx$

όπου R ρητή συνάρτηση των μεταβλητών της, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ και $\alpha \neq 0$.

ΜΕΘΟΔΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ

Τα ολοκληρώματα της μορφής αυτής υπολογίζονται χρησιμοποιώντας τις επόμενες αντικαταστάσεις, γνωστές ως **"αντικαταστάσεις του Euler"**:

1. Αν $\alpha>0$ τότε θέτουμε $\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}=t-\sqrt{\alpha}\,x$ ή $\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}=t+\sqrt{\alpha}\,x$.

2. Αν $\alpha<0$ και $\beta^2-4\alpha\gamma>0$ τότε θέτουμε $\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}=t|x-\rho_1|$ όπου ρ_1 ρίζα της $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$.

3. Αν $\alpha<0$ και $\gamma>0$ τότε θέτουμε $\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}=tx+\sqrt{\gamma}$ ή $\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}=tx-\sqrt{\gamma}$.

Σ'αυτήν την περίπτωση επίσης θέτοντας $x=\frac{1}{t}$ αναγόμαστε στην περίπτωση 1.

Ας δούμε αναλυτικά πως γίνεται το ολοκλήρωμα στην περίπτωση 1, θεωρώντας την αντικατάσταση $\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}=t-\sqrt{\alpha}\,x$. Υψώνοντας στο τετράγωνο βρίσκουμε: $x=\dfrac{t^2-\gamma}{2\sqrt{\alpha}\,t+\beta}$,

$dx=2\dfrac{\sqrt{\alpha}\,t^2+\beta t+\gamma\sqrt{\alpha}}{(2\sqrt{\alpha}\,t+\beta)^2}dt$ και $\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}=\dfrac{\sqrt{\alpha}\,t^2+\beta t+\gamma\sqrt{\alpha}}{2\sqrt{\alpha}\,t+\beta}$. Τότε το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\int R(x,\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma})\,dx=$$

$$2\int R\left(\frac{t^2-\gamma}{2\sqrt{\alpha}\,t+\beta},\ \frac{\sqrt{\alpha}\,t^2+\beta t+\gamma\sqrt{\alpha}}{2\sqrt{\alpha}\,t+\beta}\right)\frac{\sqrt{\alpha}\,t^2+\beta t+\gamma\sqrt{\alpha}}{(2\sqrt{\alpha}\,t+\beta)^2}\,dt$$

δηλ. ρητή συνάρτηση του t.

Παράδειγμα 1.38.

Έστω το ολοκλήρωμα $I=\displaystyle\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$. Επειδή $\alpha=1>0$, σύμφωνα με την περίπτωση 1, θέτουμε $\sqrt{x^2-x+1}=t-x$. Τότε:

$$x=\frac{t^2-1}{2t-1},\quad dx=2\frac{t^2-t+1}{(2t-1)^2}dt \quad \text{και} \quad \sqrt{x^2-x+1}+x=t.$$

Συνεπώς

$$I=\int\frac{2t^2-2t+2}{t(2t-1)^2}dt=\int\left(\frac{2}{t}-\frac{3}{2t-1}+\frac{3}{(2t-1)^2}\right)dt$$

$$=2\log|t|-\frac{3}{2}\log|2t-1|-\frac{3}{2}\,\frac{1}{2t-1}$$

$$=2\log|x+\sqrt{x^2-x+1}|-\frac{3}{2}\log|2x-1+2\sqrt{x^2-x+1}|-\frac{3}{2}\,\frac{1}{2x-1+2\sqrt{x^2-x+1}}+c$$

Παράδειγμα 1.39.

Στο ολοκλήρωμα $I=\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{4-3x-x^2}}$ είναι $\alpha<0$ και $\gamma>0$. Επομένως μπορούμε να εφαρμόσουμε την περίπτωση 2 ή 3.

Σύμφωνα με την περίπτωση 2, επειδή $4-3x-x^2=-(x-1)(x+4)=(1-x)(x+4)$, θέτοντας $\sqrt{4-3x-x^2}=t(x+4)$ έχουμε: $x=\frac{1-4t^2}{1+t^2}$, $dx=\frac{-10t}{(1+t^2)^2}dt$ και $\sqrt{4-3x-x^2}=\frac{5t}{1+t^2}$

Άρα:

$$I=\int\frac{-\frac{10t}{(1+t^2)^2}}{\frac{5t}{1+t^2}}dt=-2\int\frac{dt}{1+t^2}=-2\mathrm{Artg}\,t$$

$$=-2\mathrm{Artg}\sqrt{\frac{1-x}{x+4}}+c.$$

Σύμφωνα με την περίπτωση 3, θέτοντας $x=\frac{1}{t}$ το I μετασχηματίζεται στο ολοκλήρωμα $-\displaystyle\int\frac{dt}{t\sqrt{4t^2-3t-1}}$ που έχει το $\alpha>0$ και υπολογίζεται σύμφωνα με την περίπτωση 1, θέτοντας $\sqrt{4t^2-3t-1}=\omega-2t$. Τότε $t=\frac{\omega^2+1}{4\omega-3}$, $dt=2\frac{2\omega^2-3\omega-2}{(4\omega-3)^2}d\omega$ και $\sqrt{4t^2-3t-1}=\frac{2\omega^2-3\omega-2}{4\omega-3}$.

Συνεπώς

$$I=-2\int\frac{d\omega}{\omega^2+1}=-2\mathrm{Artg}\,\omega=-2\mathrm{Artg}(2t+\sqrt{4t^2-3t-1})$$

$$=-2\mathrm{Artg}\frac{2+\sqrt{4-3x-x^2}}{x}+c_1.$$

(Να αποδείξετε ότι και με τις δυο μεθόδους τα αποτελέσματα είναι τα ίδια.)

Παρατήρηση 1.24.

Γενικά, με τις αντικαταστάσεις του Euler, οδηγούμαστε σε ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων, τα οποία τις περισσότερες φορές απαιτούν πολύ χρόνο για υπολογισμό. Γι' αυτό, οι αντικαταστάσεις του Euler, καλό είναι να εφαρμόζονται μόνο όταν είναι δύσκολο να βρούμε άλλη μέθοδο για τον υπολογισμό του δοσμένου ολοκληρώματος.

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι, τα ολοκληρώματα της μορφής $\int R(x, \sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma})dx$ με κατάλληλη αντικατάσταση, ανάγονται στα ολοκληρώματα:

$$\text{i)} \int R(x, \sqrt{x^2-k^2})dx, \quad \text{ii)} \int R(x, \sqrt{x^2+k^2})dx, \quad \text{iii)} \int R(x, \sqrt{k^2-x^2})dx$$

τα οποία υπολογίζονται με την βοήθεια των αντικαταστάσεων της §1.2.Για παράδειγμα το ολοκλήρωμα του παραδείγματος 1.39 υπολογίζεται πιο απλά και ως εξής:

Επειδή $4-3x-x^2=\frac{25}{4}-\left(x+\frac{3}{2}\right)^2$, θέτοντας $x+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}\sin\theta$ έχουμε:

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{4-3x-x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{25}{4}-\left(x+\frac{3}{2}\right)^2}}=\int\frac{\frac{5}{2}\cos\theta}{\frac{5}{2}\cos\theta}d\theta=\text{Arsin}\,\frac{2x+3}{5}+c_2$$

ΜΟΡΦΗ Δ΄. $\int\frac{P_\nu(x)}{\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}dx$

όπου $P_\nu(x)$ πολυώνυμο του x, βαθμού ν.

ΜΕΘΟΔΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ

Γράφουμε την ισότητα

$$\int\frac{P_\nu(x)}{\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}dx=Q_{\nu-1}(x)\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}+k\int\frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}$$

όπου $Q_{\nu-1}(x)$ πολυώνυμο του x βαθμού ν-1 και k σταθερή. Παραγωγίζοντας και τα δυο μέλη της ισότητας αυτής και πολλαπλασιάζοντας με $\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$ παίρνουμε:

$$P_\nu(x)=Q'_{\nu-1}(x)(\alpha x^2+\beta x+\gamma)+\frac{1}{2}Q_{\nu-1}(x)(2\alpha x+\beta)+k.$$

Η τελευταία ισότητα δίνει ένα σύστημα ν+1 γραμμικών εξισώσεων για τον προσδιορισμό των συντελεστών του πολυωνύμου $Q_{\nu-1}(x)$ και της σταθερής k.

Παράδειγμα 1.40.

Έστω το ολοκλήρωμα: $I=\int\frac{x^3-x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$. Εδώ $P_\nu(x)=x^3-x-1$.

Άρα $Q_{\nu-1}(x)=Ax^2+Bx+\Gamma$. Επομένως:

$$\int\frac{x^3-x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx=(Ax^2+Bx+\Gamma)\sqrt{x^2+2x+2}+k\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$$

Παραγωγίζοντας έχουμε:

$$\frac{x^3-x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}=(2Ax+B)\sqrt{x^2+2x+2}+(Ax^2+Bx+\Gamma)\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}+\frac{k}{\sqrt{x^2+2x+2}}$$

ή

$$x^3-x-1=(2Ax+B)(x^2+2x+2)+(Ax^2+Bx+\Gamma)(x+1)+k$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των ίδιων δυνάμεων του x, παίρνουμε το σύστημα:

$$3A=1,\ 5A+2B=0,\ 3B+4A+\Gamma=-1,\ 2B+\Gamma+k=-1.$$

Λύνοντάς το έχουμε: $A=\frac{1}{3}$, $B=-\frac{5}{6}$, $\Gamma=\frac{1}{6}$, $k=\frac{1}{2}$.

Επομένως:

$$I=\frac{1}{6}(2x^2-5x+1)\sqrt{x^2+2x+2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$$

$$=\frac{1}{6}(2x^2-5x+1)\sqrt{x^2+2x+2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+1}}$$

$$=\frac{1}{6}(2x^2-5x+1)\sqrt{x^2+2x+2}+\frac{1}{2}\log(x+1+\sqrt{x^2+2x+2})+c.$$

ΜΟΡΦΗ Ε'. α) $\int \frac{P_\nu(x)}{(x-\rho)^m\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}dx$

β) $\int \frac{P_\nu(x)}{(\delta x^2+\varepsilon x+\zeta)\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}dx,\ \varepsilon^2-4\delta\zeta>0$

ΜΕΘΟΔΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ

Το πρώτο ολοκλήρωμα με την αντικατάσταση $x-\rho=\frac{1}{t}$ ανάγεται στην μορφή Δ'. Το δεύτερο, αφού $\varepsilon^2-4\delta\zeta>0$, θα είναι $\delta x^2+\varepsilon x+\zeta=\delta(x-\rho_1)(x-\rho_2)$ και έτσι προκύπτει άθροισμα ολοκληρωμάτων της μορφής α).

Παράδειγμα 1.41.

Θα υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα: $I=\int\frac{dx}{(x^2+x)\sqrt{x^2+1}}$. Αυτό γράφεται, παρατηρώντας ότι: $\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$,

$$I=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx=\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}-\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$$

Θα υπολογίσουμε χωριστά τα δυο ολοκληρώματα, τα οποία είναι της μορφής α'). Στο πρώτο θέτουμε $x=\frac{1}{t}$ και έχουμε:

$$I_1=\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}=-\log(t+\sqrt{1+t^2})=-\log\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}=-\mathrm{Ar\,sinh}\,\frac{1}{x}$$

Στο δεύτερο θέτοντας $x+1=\frac{1}{\omega}$ έχουμε:

$$I_2=\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}=-\int\frac{d\omega}{\sqrt{2\omega^2-2\omega+1}}=-\int\frac{d\omega}{\sqrt{2}\left[\left(\omega-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right]^{1/2}}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{Ar\,sinh}\,(2\omega-1)=-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{Ar\,sinh}\,\frac{1-x}{1+x}$$

Τελικά είναι:

$$I=-\mathrm{Ar\,sinh}\,\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{Ar\,sinh}\,\frac{1-x}{1+x}+c$$

ΜΟΡΦΗ ΣΤ'. (Διωνυμικά ολοκληρώματα) $\int x^m(\alpha+\beta x^n)^p dx$ όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}-\{0\}$ και $m,n,p\in\mathbb{Q}$.

ΜΕΘΟΔΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ

Τα ολοκληρώματα αυτά υπολογίζονται μόνο αν ένας τουλάχιστο από τους αριθμούς p, $\frac{m+1}{n}$, $\frac{m+1}{n}+p$ είναι ακέραιος (Συνθήκες του Tchebychev).

α) Αν $p\in\mathbb{Z}$, θέτουμε $t^r=x$, όπου r το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των παρονομαστών των m και n.

β) Αν $\frac{m+1}{n}\in\mathbb{Z}$, θέτουμε $\alpha+\beta x^n=t^s$, όπου s ο παρονομαστής του κλάσματος p.

γ) Αν $\frac{m+1}{n}+p\in\mathbb{Z}$, θέτουμε $\alpha x^{-n}+\beta=t^s$, όπου s ο παρονομαστής του κλάσματος p.

Παράδειγμα 1.42.

Έστω το ολοκλήρωμα $I=\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}(1+\sqrt[3]{x})^3}$. Αυτό γράφεται:

$I=\int x^{-2/3}(1+x^{1/3})^{-3}dx$. Έχουμε $m=-2/3$, $n=\frac{1}{3}$, $p=-3$. Επειδή $p\in\mathbb{Z}$, σύμφωνα με το α) θέτοντας $t^3=x$ έχουμε:

$$I=\int t^{-2}(1+t)^{-3}3t^2dt=3\int\frac{dt}{(1+t)^3}=-\frac{3}{2(1+t)^2}=-\frac{3}{2}\frac{1}{(1+\sqrt[3]{x})^2}+c.$$

Παράδειγμα 1.43.

Για το ολοκλήρωμα $I=\int\frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}}=\int x^{-1}(1+x^5)^{-(1/3)}dx$ είναι $m=-1$, $n=5$, $p=-\frac{1}{3}$. Αφού $\frac{m+1}{n}=0\in\mathbb{Z}$, σύμφωνα με την περίπτωση β) θέτουμε $1+x^5=t^3$. Τότε $x^5=t^3-1$, $x=(t^3-1)^{1/5}$, $dx=\frac{1}{5}(t^3-1)^{-4/5}3t^2dt=\frac{3}{5}t^2(t^3-1)^{-4/5}dt$

Συνεπώς:

$$I=\int(t^3-1)^{-(1/5)}(t^3)^{-(1/3)}\frac{3}{5}t^2(t^3-1)^{-(4/5)}dt=\frac{3}{5}\int\frac{t}{t^3-1}dt$$

$$=\frac{1}{5}\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{t-1}{t^2+t+1}\right)dt=\frac{1}{10}\log\frac{(t-1)^2}{t^2+t+1}+\frac{\sqrt{3}}{5}\,\mathrm{Artg}\,\frac{2t+1}{\sqrt{3}}$$

$$=\frac{1}{10}\log\frac{(\sqrt[3]{1+x^5}-1)^2}{\sqrt[3]{(1+x^5)^2}+\sqrt[3]{1+x^5}+1}+\frac{\sqrt{3}}{5}\,\mathrm{Artg}\,\frac{2\sqrt[3]{1+x^5}+1}{\sqrt{3}}+c.$$

Παράδειγμα 1.44.

Ας θεωρήσουμε τώρα το ολοκλήρωμα $I=\int\frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$. Εδώ είναι $\frac{m+1}{n}+p=0\in Z$. Επομένως, περίπτωση γ), θέτουμε $x^{-3}+1=t^3$. Τότε $x^{-3}=t^3-1$, $x=(t^3-1)^{-1/3}$, $dx=-t^2(t^3-1)^{-4/3}dt$. Επίσης είναι: $\frac{1}{x^3}=t^3-1 \Rightarrow x^3=\frac{1}{t^3-1} \Rightarrow x^3+1=\frac{t^3}{t^3-1}$. Άρα

$$I=\int(1+x^3)^{-1/3}dx=-\int\left(\frac{t^3}{t^3-1}\right)^{-1/3}t^2(t^3-1)^{-4/3}dt=-\int\frac{t}{t^3-1}dt$$

$$=-\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{t-1}{t^2+t+1}\right)dt=\frac{1}{6}\log\frac{t^2+t+1}{(t-1)^2}-\frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Artg}\,\frac{2t+1}{\sqrt{3}}$$

$$=\frac{1}{6}\log\frac{\sqrt[3]{(1+x^{-3})^2}+\sqrt[3]{1+x^{-3}}+1}{(\sqrt[3]{1+x^{-3}}-1)^2}-\frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Artg}\,\frac{2\sqrt[3]{1+x^{-3}}+1}{\sqrt{3}}+c.$$

Παράδειγμα 1.45.

Έστω το ολοκλήρωμα $I=\int\frac{x^3}{\sqrt[4]{1+x^3}}dx=\int x^3(1+x^3)^{-1/4}dx$. Εδώ είναι: $m=3$, $n=3$, $p=-\frac{1}{4}$. Παρατηρούμε ότι:

i) $p\notin Z$, ii) $\frac{m+1}{n}=\frac{4}{3}\notin Z$, iii) $\frac{m+1}{n}+p=\frac{4}{3}-\frac{1}{4}\notin Z$.

Δηλ. δεν ισχύει καμμιά από τις περιπτώσεις α), β) ή γ). Επομένως το ολοκλήρωμα δεν υπολογίζεται στοιχειωδώς.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. α) Να αναχθεί σε ολοκλήρωμα ρητής συναρτήσεως το ολοκλήρωμα $\int R(x, \sqrt{\alpha x+\beta}, \sqrt{\gamma x+\delta})dx$, όπου R ρητή συνάρτηση των μεταβλητών της και $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in IR$

β) Να υπολογιστεί το $\int\frac{dx}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}$

Λύση

α) Θέτουμε $\sqrt{\alpha x+\beta}=t$. Τότε $x=\frac{t^2-\beta}{\alpha}$, $dx=\frac{2}{\alpha}t\,dt$ και το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\int R(x,\sqrt{\alpha x+\beta},\sqrt{\gamma x+\delta})dx=\frac{2}{\alpha}\int R\left(\frac{t^2-\beta}{\alpha},t,\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}t^2+\frac{\alpha\delta-\gamma\beta}{\alpha}}\right)t\,dt.$$

Αυτό είναι της μορφής Γ΄ και ανάγεται σε ολοκλήρωμα ρητής συναρτήσεως.

β) Σύμφωνα με το α) θέτουμε $\sqrt{x+1}=t$. Τότε $x=t^2-1$, $dx=2t\,dt$ και το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}=\int\frac{2t}{\sqrt{t^2+1}-t}dt$$

Το τελευταίο είναι της μορφής Γ΄ και υπολογίζεται θέτοντας $\sqrt{t^2+1}=\omega-t$. Βρίσκουμε $t=\frac{\omega^2-1}{2\omega}$, $dt=\frac{\omega^2+1}{2\omega^2}d\omega$, $\sqrt{t^2+1}=\frac{\omega^2+1}{2\omega}$ και επομένως το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$I=\int\frac{\omega^4-1}{2\omega^2}d\omega=\frac{\omega^3}{6}+\frac{1}{2\omega}=\frac{1}{6}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2})^3+\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2})}+c.$$

2. α) Να αποδείξετε ότι το ολοκλήρωμα

$$I=\int x^m(\alpha x^2+2\beta x+\gamma)^q dx,\ m\in IN,\ q\in Q,\ \alpha,\beta,\gamma\in IR$$

ανάγεται σε διωνυμικά ολοκληρώματα.

β) Να βρήτε αναγωγικό τύπο για το

$$\int x^m(\alpha x^2+2\beta x+\gamma)^{-(1/2)}dx$$

Απόδειξη

α) Επειδή $\alpha x^2+2\beta x+\gamma=\alpha\left(x+\frac{\beta}{\alpha}\right)^2+\frac{\alpha\gamma-\beta^2}{\alpha}=\alpha(x+A)^2+B$, αν $A=\frac{\beta}{\alpha}$ και $\frac{\alpha\gamma-\beta^2}{\alpha}=B$, θα έχουμε:

$$I=\int x^m(\alpha x^2+2\beta x+\gamma)^q dx=\int x^m[\alpha(x+A)^2+B]^q dx$$
$$=\int (t-A)^m(\alpha t^2+B)^q dt,\quad x+A=t$$

Αφού $m\in\mathbb{N}$, αναπτύσσοντας το $(t-A)^m$, προκύπτει άθροισμα διωνυμικών ολοκληρωμάτων.

β) Έστω $I_m=\int \frac{x^m}{\sqrt{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}}dx$. Τότε έχουμε:

$$I_m=\frac{1}{\alpha}\int x^{m-1}\frac{\alpha x+\beta-\beta}{\sqrt{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}}dx=\frac{1}{\alpha}\int x^{m-1}d\sqrt{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}-\frac{\beta}{\alpha}\int\frac{x^{m-1}}{\sqrt{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}}dx$$

$$=\frac{1}{\alpha}x^{m-1}\sqrt{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}-\frac{m-1}{\alpha}\int x^{m-2}\sqrt{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}dx-\frac{\beta}{\alpha}I_{m-1}$$

$$=\frac{1}{\alpha}x^{m-1}\sqrt{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}-\frac{m-1}{\alpha}\int x^{m-2}\frac{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}{\sqrt{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}}dx-\frac{\beta}{\alpha}I_{m-1}$$

$$=\frac{1}{\alpha}x^{m-1}\sqrt{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}-(m-1)I_m-2\frac{\beta}{\alpha}(m-1)I_{m-1}-(m-1)\frac{\gamma}{\alpha}I_{m-2}-\frac{\beta}{\alpha}I_{m-1}$$

δηλ.

$$\alpha mI_m+(2m-1)\beta I_{m-1}+(m-1)\gamma I_{m-2}=x^{m-1}\sqrt{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}$$

3. Να υπολογίσετε το $\int\frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2-1}}$

Λύση

Θέτουμε $\sqrt{x^2-1}=xt$. Τότε $x^2=\frac{1}{1-t^2}$, $xdx=\frac{t}{(1-t^2)^2}dt$, $\sqrt{x^2-1}=\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$,
$x^2+1=\frac{2-t^2}{1-t^2}$. Συνεπώς

$$I=\int\frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2-1}}=\int\frac{xdx}{(x^2+1)x\sqrt{x^2-1}}=\int\frac{\frac{tdt}{(1-t^2)^2}}{\frac{2-t^2}{1-t^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\cdot\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}}$$

$$=\int\frac{dt}{2-t^2}=\frac{1}{2\sqrt2}\int\frac{dt}{\sqrt2-t}+\frac{1}{2\sqrt2}\int\frac{dt}{\sqrt2+t}$$

$$=-\frac{1}{2\sqrt2}\log|\sqrt2-t|+\frac{1}{2\sqrt2}\log|\sqrt2+t|$$

$$=\frac{1}{2\sqrt2}\log\left|\frac{\sqrt2+t}{\sqrt2-t}\right|=\frac{1}{2\sqrt2}\log\frac{(x\sqrt2+\sqrt{x^2-1})^2}{x^2+1}+c$$

Σημείωση

Γενικά τα ολοκληρώματα της μορφής $\int\frac{dx}{(\alpha+\beta x^2)\sqrt{\gamma+\delta x^2}}$ υπολογίζονται με την αντικατάσταση: $\sqrt{\gamma+\delta x^2}=xt$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.22. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $\int\frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}dx$ β) $\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x}$

γ) $\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx$ δ) $\int\sqrt{\frac{1-\sqrt x}{1+\sqrt x}}dx$

1.23. Επίσης τα ολοκληρώματα:

α) $\int\frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})}dx$ β) $\int\frac{x}{(x+1)^{1/2}+(x+1)^{1/3}}dx$

γ) $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}}$ δ) $\int\frac{2}{(2-x)^2}\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}dx$

1.24. Όμοια τα ολοκληρώματα:

α) $\int\frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}$ β) $\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2+x+1}}$

γ) $\int\frac{dx}{x\sqrt{-x^2+5x-6}}$ δ) $\int\frac{dx}{x-\sqrt{x^2-1}}$

ε) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2x+3}}$ στ) $\int \sqrt{3x^2-3x+1}\,dx$

ζ) $\int \sqrt{1-4x-x^2}\,dx$ η) $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{2+x^2}\,dx$

1.25. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}}\,dx$ β) $\int \sqrt{4x^2-4x+3}\,dx$

γ) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+x+1}}$ δ) $\int \frac{x-1}{x^2\sqrt{2x^2-2x+1}}\,dx$

ε) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-4x+2}}$ στ) $\int \frac{dx}{(2x+3)\sqrt{4x+5}}$

ζ) $\int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}}$ η) $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{1-x^2}\,dx$

1.26. Επίσης τα ολοκληρώματα:

α) $\int \sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})^4 dx$ β) $\int x^{-6}(1+2x^3)^{2/3}dx$

γ) $\int \sqrt{x(1+x^3)}\,dx$ δ) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$

ε) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$ στ) $\int \sqrt[3]{x(1-x^2)}\,dx$

§ 1.7. ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Θα εξετάσουμε τώρα ολοκληρώματα τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Θα διακρίνουμε τις παρακάτω βασικές περιπτώσεις:

ΜΟΡΦΗ Α΄. $\int R(\sin x, \cos x)dx$

όπου R ρητή συνάρτηση των μεταβλητών της.

ΜΕΘΟΔΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ

Θέτουμε $tg\frac{x}{2}=t$, $x\in(-\pi,\pi)$. Τότε $x=2Artgt, t\in\mathbb{R}$

$dx=\frac{2dt}{1+t^2}$, $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$. Συνεπώς

$$\int R(\sin x,\cos x)dx=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}$$

Παράδειγμα 1.46.

Ας υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $I=\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}dx$. Θέτοντας $tg\frac{x}{2}=t$ έχουμε:

$$I=\int \frac{1+\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}=\frac{1}{2}\int\left(t+2+\frac{1}{t}\right)dt$$

$$=\frac{t^2}{4}+t+\frac{1}{2}\log|t|=\frac{1}{4}tg^2\frac{x}{2}+tg\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\log\left|tg\frac{x}{2}\right|+c.$$

Παρατήρηση 1.25.

Η παραπάνω αντικατάσταση, αν και έχει το πλεονέκτημα να εφαρμόζεται σε όλα τα τριγωνομετρικά ολοκληρώματα, εν τούτοις πολλές φορές οδηγεί σε πολύπλοκα ολοκληρώματα. Γι' αυτό σε ορισμένες περιπτώσεις προτιμούνται άλλες αντικαταστάσεις πιο απλές.

Έτσι έχουμε τις παρακάτω **ειδικές περιπτώσεις**:

1. Αν $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$ δηλ. είναι περιττ ως προς $\sin x$, τότε θέτουμε $\cos x=t$.

2. Αν $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$ δηλ. είναι περιττ ως προς $\cos x$, τότε θέτουμε $\sin x=t$.

3. Αν $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$ δηλ. είναι άρτια ω προς $\sin x$ και $\cos x$, τότε θέτουμε $tgx=t$. Σ'αυτήν την περί πτωση θα έχουμε:

$$dx=\frac{dt}{1+t^2},\ \sin x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\ \cos x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

Παράδειγμα 1.47.

Έστω το ολοκλήρωμα $I=\int \frac{dx}{\sin x(2\cos^2x-1)}$. Η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{\sin x(2\cos^2x-1)}$ είναι περιττή ως προς sinx. Εκομένως θέτοντας cosx=t θα έχουμε:

$$I=-\int \frac{-\sin x\,dx}{\sin^2x(2\cos^2x-1)}=-\int\frac{dt}{(1-t^2)(2t^2-1)}=2\int\frac{dt}{1-2t^2}-\int\frac{dt}{1-t^2}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt2}\log\left|\frac{1+t\sqrt2}{1-t\sqrt2}\right|-\frac12\log\left|\frac{1+t}{1-t}\right|$$

$$=\frac{1}{\sqrt2}\log\left|\frac{1+\sqrt2\cos x}{1-\sqrt2\cos x}\right|+\frac12\log\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right|+c.$$

Παράδειγμα 1.48.

Η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{\sin x\cdot\sin 2x}=\frac{1}{2\sin^2x\cdot\cos x}$ είναι περιττή ως προς cosx. Εκομένως

$$\int\frac{dx}{\sin x\cdot\sin 2x}=\frac12\int\frac{\cos x\,dx}{\sin^2x\cdot\cos^2x}=\frac12\int\frac{dt}{t^2(1-t^2)}=\frac12\int\frac{dt}{t^2}+\frac12\int\frac{dt}{1-t^2}$$

$$=\frac{-1}{2t}+\frac14\log\left|\frac{1-t}{1+t}\right|=-\frac{1}{2\sin x}+\frac14\log\left|\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right|+c.$$

Παράδειγμα 1.49.

Η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{\alpha^2\cos^2x+\beta^2\sin^2x}$ είναι άρτια ως προς sinx και cosx. Εκομένως:

$$\int\frac{dx}{\alpha^2\cos^2x+\beta^2\sin^2x}=\int\frac{1}{\frac{\alpha^2}{1+t^2}+\frac{\beta^2t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{dt}{1+t^2}=\int\frac{dt}{\alpha^2+\beta^2t^2}$$

$$=\frac{1}{\alpha\beta}\,\mathrm{Artg}\,\frac{\beta}{\alpha}t=\frac{1}{\alpha\beta}\,\mathrm{Artg}\left(\frac{\beta}{\alpha}\mathrm{tg}x\right)+c.$$

ΜΟΡΦΗ Β'. $\int\sin^mx\cdot\cos^nx\,dx$

ΜΕΘΟΔΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ

Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

(B1) m και n μη αρνητικοί ακέραιοι

Αν $I(m,n)=\int\sin^mx\cdot\cos^nx\,dx$ τότε ισχύουν οι παρακάτω αναγωγικοί τύποι:

$$I(m,n)=\frac{\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x}{m+n}+\frac{n-1}{m+n}I(m,n-2),\quad n\geq 2 \qquad (1)$$

$$=-\frac{\sin^{m+1}x\cos^{n+1}x}{m+n}+\frac{m-1}{m+n}I(m,-2,n),\quad m\geq 2 \qquad (2)$$

Πραγματικά ας αποδείξουμε τον τύπο (1). Έχουμε:

$$I(m,n)=\int\sin^mx\cdot\cos^{n-1}x\,d\sin x=\sin^{m+1}x\cdot\cos^{n-1}x-$$

$$-\int\sin x(m\cdot\sin^{m-1}x\cdot\cos^nx-(n-1)\sin^{m+1}x\cdot\cos^{n-2}x)dx$$

$$=\sin^{m+1}x\cdot\cos^{n-1}x-m\int\sin^mx\cdot\cos^nx\,dx+(n-1)\int\sin^{m+2}x\cdot\cos^{n-2}x\,dx$$

$$=\sin^{m+1}x\cdot\cos^{n-1}x-mI(m,n)+(n-1)\int\sin^mx(1-\cos^2x)\cos^{n-2}x\,dx$$

$$=\sin^{m+1}x\cdot\cos^{n-1}x-mI(m,n)+(n-1)I(m,n-2)-(n-1)I(m,n)$$

Λύνοντας ως προς I(m,n) έχουμε τον ζητούμενο τύπο.
Ειδικά, αν n=0, από τον τύπο (2) έχουμε:

$$\int\sin^mx\,dx=-\frac{\cos x\cdot\sin^{m-1}x}{m}+\frac{m-1}{m}\int\sin^{m-2}x\,dx \qquad (3)$$

ενώ αν m=0, από τον τύπο (1) έχουμε:

$$\int\cos^nx\,dx=\frac{\sin x\cdot\cos^{n-1}x}{n}+\frac{n-1}{n}\int\cos^{n-2}x\,dx \qquad (4)$$

(B2) m και n ακέραιοι

Αν m περιττός και θετικός, τότε θέτουμε cosx=t

Αν n περιττός και θετικός, τότε θέτουμε $\sin x = t$

Αν $m+n$ άρτιος και αρνητικός, τότε θέτουμε $tgx = t$.

Αν m και n είναι άρτιοι και θετικοί, τότε χρησιμοποιούμε τους τύπους: $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

Ειδικά, αν $n>0$ και $m<0$ ή $m>0$ και $n<0$ θα έχουμε ολοκληρώματα της μορφής $\int \frac{\cos^n x}{\sin^m x}dx$ ή $\int \frac{\sin^m x}{\cos^n x}dx$ αντίστοιχα, για τα οποία ισχύουν οι παρακάτω αναγωγικοί τύποι:

$$\int \frac{\cos^n x}{\sin^m x}dx = -\frac{\cos^{n-1}x}{(m-1)\sin^{m-1}x} - \frac{n-1}{m-1}\int \frac{\cos^{n-2}x}{\sin^{m-2}x}dx \qquad (5)$$

$$\int \frac{\sin^m x}{\cos^n x}dx = \frac{\sin^{m-1}x}{(n-1)\cos^{n-1}x} - \frac{m-1}{n-1}\int \frac{\sin^{m-2}x}{\cos^{n-2}x}dx \qquad (6)$$

Αν $m<0$ και $n<0$, τότε θα έχουμε:

$$\int \frac{dx}{\sin^m x\cdot\cos^n x} = -\frac{1}{(m-1)\sin^{m-1}x\cdot\cos^{n-1}x} + \frac{m+n-2}{m-1}\int \frac{dx}{\sin^{m-2}x\cdot\cos^n x} \qquad (7)$$

$$m \neq 1$$

$$= \frac{1}{(n-1)\sin^{m-1}x\cdot\cos^{n-1}x} + \frac{m+n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\sin^m x\cdot\cos^{n-2}x} \qquad (8)$$

$$n \neq 1$$

Από τον τύπο (7) αν $n=0$, έχουμε:

$$\int \frac{dx}{\sin^m x} = -\frac{\cos x}{(m-1)\sin^{m-1}x} + \frac{m-2}{m-1}\int \frac{dx}{\sin^{m-2}x} \qquad (9)$$

ενώ από τον τύπο (8) αν $m=0$ έχουμε:

$$\int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1}x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\cos^{n-2}x} \qquad (10)$$

Τέλος αν $m+n=0$ θα έχουμε ολοκλήρωμα της μορφής $\int tg^m x dx$ για το οποίο έχουμε:

$$\int tg^m x dx = \int tg^{m-2}x(1+tg^2x-1)dx = \int tg^{m-2}x\,dtgx - \int tg^{m-2}x\,dx$$

$$tg^{m-1}x \quad \int \quad {}^{m-2} \qquad (11)$$

(B_3) m και n ρητοί

Ανάγονται σε διωνυμικά ολοκληρώματα της μορφής $\int t^m(1-t^2)^{(n-1)/2}dt$ με την αντικατάσταση $\sin x = t$. Σ'αυτήν την περίπτωση θα υπολογίζονται αν ισχύει μια από τις παρακάτω συνθήκες (βλέπε § 1.6, μορφή ΣΤ΄):

i) $n=2\lambda+1, \lambda \in IN$ ii) $m=2\lambda+1, \lambda \in IN$ iii) $m+n=2\lambda, \lambda \in IN$

Παράδειγμα 1.50.

Έστω το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}dx$. Από τον τύπο (6) έχουμε:

$$I = \frac{\sin^3 x}{\cos x} - 3\int \sin^2 x dx = \frac{\sin^3 x}{\cos x} - \frac{3}{2}x + \frac{3}{4}\sin 2x + c \quad (\text{άσκ. } 1.3\beta)$$

$$= tgx + \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{3}{2}x + c.$$

Παράδειγμα 1.51.

Θα υπολογίσουμε το $I = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin^{11}x\cos x}}$. Αυτό γράφεται:

$I = \int \sin^{-(11/3)}x\cdot\cos^{-(1/3)}x dx$. Θέτοντας $t=\sin x$ καταλήγουμε στο $I = \int t^{-(11/3)}(1-t^2)^{-2/3}dt$ το οποίο είναι διωνυμικό και υπολογίζεται θέτοντας $t^{-2}-1=\omega^3$. Τότε $t=(\omega^3+1)^{-1/2}$, $dt = -\frac{3}{2}\omega^2(\omega^3+1)^{-3/2}d\omega$, $1-t^2 = \frac{\omega^3}{\omega^3+1}$ και συνεπώς:

$$I = -\frac{3}{2}\int(\omega^3+1)d\omega = -\frac{3}{8}\omega^4 - \frac{3}{2}\omega = -\frac{3}{8}\sqrt[3]{tg^8x} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{tg^2x} + c.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{dx}{\alpha+\beta\cos x}$, $\alpha, \beta \in IR$

Λύση

Θέτουμε $tg\frac{x}{2} = t$. Τότε το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$I=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\alpha+\beta\frac{1-t^2}{1+t^2}}=2\int\frac{dt}{\alpha+\beta+(\alpha-\beta)t^2} \quad (*)$$

<u>1η περίπτωση</u> $\alpha^2>\beta^2$. Τότε η (*) δίνει

$$I=\frac{2}{\alpha-\beta}\int\frac{dt}{\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}+t^2}=\frac{2}{\alpha-\beta}\frac{1}{\sqrt{\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}}}\mathrm{Artg}\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}\,t=\frac{2}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}\mathrm{Artg}\left(\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right)+c$$

<u>2η περίπτωση</u> $\alpha^2<\beta^2$. Τότε η (*) δίνει

$$I=\frac{2}{\beta-\alpha}\int\frac{dt}{\frac{\beta+\alpha}{\beta-\alpha}-t^2}=\frac{2}{\beta-\alpha}\frac{1}{2\sqrt{\frac{\beta+\alpha}{\beta-\alpha}}}\cdot\log\frac{\left|\sqrt{\frac{\beta+\alpha}{\beta-\alpha}}+t\right|}{\left|\sqrt{\frac{\beta+\alpha}{\beta-\alpha}}-t\right|}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\beta^2-\alpha^2}}\log\left|\frac{\sqrt{\beta+\alpha}+\sqrt{\beta-\alpha}\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{\beta+\alpha}-\sqrt{\beta-\alpha}\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}}\right|+c$$

2. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int\frac{1-r\cos x}{1-2r\cos x+r^2}dx$ όπου $r\in(0,1)$.

Λύση

Το ολοκλήρωμα γράφεται:

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{(1-2r\cos x+r^2)+(1-r^2)}{1-2r\cos x+r^2}dx=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\int\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}dx.$$

Στο τελευταίο θέτοντας $\mathrm{tg}\frac{x}{2}=t$ έχουμε:

$$\frac{1}{2}\int\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}dx=\int\frac{1-r^2}{(1-r)^2+(1+r)^2t^2}dt=\frac{1-r^2}{(1+r)^2}\int\frac{dt}{\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^2+t^2}=$$

$$=\mathrm{Artg}\left\{\frac{1+r}{1-r}\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right\}$$

Άρα $I=\frac{1}{2}x+\mathrm{Artg}\left\{\frac{1+r}{1-r}\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right\}+c.$

3. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$I_1=\int\frac{\sin x}{\alpha\cos x+\beta\sin x}dx,\quad I_2=\int\frac{\cos x}{\alpha\cos x+\beta\sin x}dx$$

Λύση

Αντί της κλασικής μεθόδου, θέτοντας $\mathrm{tg}\frac{x}{2}=t$, θα ακολουθήσουμε το παρακάτω "τέχνασμα":

$$\beta I_1+\alpha I_2=\int dx=x$$

$$-\alpha I_1+\beta I_2=\int\frac{-\alpha\sin x+\beta\cos x}{\alpha\cos x+\beta\sin x}dx=\log|\alpha\cos x+\beta\sin x|$$

Λύνοντας το σύστημα, με άγνωστους τα I_1 και I_2, έχουμε:

$$I_1=\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\{\beta x-\alpha\log|\alpha\cos x+\beta\sin x|\}+c_1$$

$$I_2=\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\{\alpha x+\beta\log|\alpha\cos x+\beta\sin x|\}+c_2$$

4. Να βρήτε αναγωγικό τύπο, για το ολοκλήρωμα:

$$I_\nu=\int\cos px\cdot\sin^\nu qx\,dx$$

Λύση

Έχουμε:

$$I_\nu=\frac{\sin px}{p}\sin^\nu qx-\frac{\nu q}{p}\int\sin px\cdot\sin^{\nu-1}qx\cdot\cos qx\,dx$$

$$=\frac{\sin px}{p}\sin^\nu qx-\frac{\nu q}{p}\Big[-\frac{\cos px}{p}\sin^{\nu-1}qx\cdot\cos qx+\int\frac{\cos px}{p}\cdot$$

$$\{(\nu-1)q\sin^{\nu-2}qx\cdot(1-\sin^2qx)-q\sin^\nu qx\}dx\Big]$$

$$=\frac{\sin px}{p}\sin^\nu qx+\frac{\nu q}{p^2}\cos px\cdot\sin^{\nu-1}qx\,\cos qx-\frac{\nu q^2}{p^2}\int\cos px\cdot$$

$$\{(\nu-1)\sin^{\nu-2}qx-\nu\sin^\nu qx\}dx$$

απ' όπου τελικά παίρνουμε:

$$I_\nu=\sin^{\nu-1}qx\,\frac{p\sin px\cdot\sin qx+\nu q\cos px\cdot\cos qx}{p^2-\nu^2q^2}-\frac{\nu(\nu-1)q^2}{p^2-\nu^2q^2}\,I_{\nu-2},\ \nu\geqslant 2$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.27. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $\int\frac{dx}{\sin x(2+\cos x-2\sin x)}$ β) $\int\frac{\cos x}{2+\sin x}dx$

γ) $\int\frac{dx}{\alpha\cos x+\beta\sin x}$ δ) $\int\frac{\sin^2x\cdot\cos x}{\sin x+\cos x}dx$

ε) $\int\frac{dx}{1+tgx}$ στ) $\int\frac{\sin x}{(1-\cos x)^2}dx$

1.28. Επίσης τα ολοκληρώματα:

α) $\int\frac{1-tgx}{1+tgx}dx$ β) $\int\frac{dx}{5+4\sin x}$

γ) $\int\frac{dx}{1+\sin^2x}$ δ) $\int\sqrt{1+\sin x}\,dx$

ε) $\int\frac{\sqrt{tgx}}{\sin x\cdot\cos x}dx$ στ) $\int\sqrt{tgx}\,dx$

1.29. Όμοια τα ολοκληρώματα:

α) $\int\frac{dx}{\sqrt[4]{\sin^3x\cdot\cos^5x}}$ β) $\int\frac{dx}{\sin^5x\cdot\cos^5x}$

γ) $\int\frac{\cos^4x}{\sin^3x}dx$ δ) $\int\sin^2x\cdot\cos^5x\,dx$

1.30. Να βρήτε αναγωγικούς τύπους για τα ολοκληρώματα:

α) $A_\nu=\int\cos px\cdot\cos^\nu qx\,dx$ β) $B_\nu=\int\sin px\cdot\cos^\nu qx\,dx$

γ) $\Gamma(\nu,p)=\int\frac{\cos\nu x}{\sin^px}dx$ δ) $\Delta(\nu,p)=\int\frac{\sin\nu x}{\sin^px}dx$

ε) $E_\nu=\int\frac{\sin^\nu px}{\cos px}dx$ στ) $Z_\nu=\int\frac{\cos\nu x}{\cos x}dx$

§ 1.8. ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Τα ολοκληρώματα της μορφής $\int R(\sinh x,\cosh x)dx$, όπου R ρητή συνάρτηση του $\sinh x$ και $\cosh x$, υπολογίζονται όπως ακριβώς και τα τριγωνομετρικά ολοκληρώματα, με την αντικατάσταση: $tgh\frac{x}{2}=t$. Τότε $dx=\frac{2dt}{1-t^2}$, $\sinh x=\frac{2t}{1-t^2}$, $\cosh x=\frac{1+t^2}{1-t^2}$.

Πολλές φορές όμως, η αντικατάσταση $e^x=t$, οδηγεί σε πιο απλά ολοκληρώματα. Ας δούμε μερικά παραδείγματα:

Παράδειγμα 1.52.

Είναι: $\int\cosh^2x\,dx=\int\frac{1}{2}(\cosh 2x+1)dx=\frac{1}{4}\sinh 2x+\frac{1}{2}x+c.$

Παράδειγμα 1.53.

Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\int\frac{dx}{\sinh x}$ θέτουμε $tgh\frac{x}{2}=t$. Τότε αυτό γίνεται:

$$\int\frac{dx}{\sinh x}=\int\frac{1}{\frac{2t}{1-t^2}}\cdot\frac{2dt}{1-t^2}=\int\frac{dt}{t}=\log|t|=\log\left|tgh\frac{x}{2}\right|+c.$$

Παράδειγμα 1.54.

Ας υπολογίσουμε τέλος, το ολοκλήρωμα $\int\frac{dx}{\sinh x+\cosh x}$. Έχουμε:

$$\int\frac{dx}{\sinh x+\cosh x}=\int\frac{2dx}{e^x-e^{-x}+e^x+e^{-x}}=\int e^{-x}dx=-e^{-x}+c$$

ΑΣΚΗΣΗ

1.31. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $\int \sinh^2 x \cdot \cosh^3 x dx$ β) $\int \frac{dx}{\sinh x \cdot \cosh x}$

γ) $\int \sqrt{\text{tgh}x} dx$ δ) $\int \frac{e^x dx}{\sinh x + \cosh x}$

§ 1.9. ΓΕΝΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Η τεχνική της ολοκληρώσεως δεν είναι θέμα και τόσο εύκολο, γιατί η ποικιλία των παρουσιαζομένων περιπτώσεων είναι αρκετά εκτεταμένη. Αναφέραμε τις πιο βασικές περιπτώσεις. Θα πρέπει να κατέχουμε καλά τους κανόνες ολοκληρώσεως, τις ιδιότητες, καθώς και τον πίνακα των βασικών ολοκληρωμάτων. Όπως είδαμε εξάλλου, ένα ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογιστεί με πολλές μεθόδους (Παράδειγμα 1.39). Η εκλογή της απλούστερης μεθόδου είναι προσωπικό θέμα και εξαρτάται από την εξάσκηση πάνω σε τέτοια θέματα. Επίσης διάφορα τεχνάσματα, αντί της κλασικής μεθόδου, μπορούν να οδηγήσουν ευκολότερα στον υπολογισμό ενός ολοκληρώματος. Κι΄αυτό όμως είναι καθαρά θέμα εξάσκησης. Για να γίνουν αυτά πιο κατανοητά, ας δούμε μερικά παραδείγματα:

① Το ολοκλήρωμα $\int \frac{x}{(x+1)^3} dx$ είναι ολοκλήρωμα ρητής συναρτήσεως και υπολογίζεται αναλύοντας σε απλά κλάσματα: $\frac{x}{(x+1)^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{\Gamma}{(x+1)^3}$. Ένας πιο εύκολος υπολογισμός επιτυγχάνεται με την αντικατάσταση x+1=u, οπότε $\int \frac{x}{(x+1)^3} dx = \int \frac{u-1}{u^3} du = \int \frac{du}{u^2} - \int \frac{du}{u^3}$ κ.τ.λ.

② Το ολοκλήρωμα β) της εφαρμογής 1 της §1.6 υπολογίστηκε κάνοντας δύο αντικαταστάσεις. Αυτές μπορούσαν να αποφευχθούν αν πολλαπλασιάζαμε την συνάρτηση στο αρχικό ολοκλήρωμα με με την συζυγή παράσταση του παρονομαστή. Τότε θα παίρναμε $I = \int (\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}) dx = \frac{2}{3}(x+2)^{3/2} + \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} + c$.

③ Το ολοκλήρωμα $\int \frac{\sin x}{1+\sin x} dx$, σαν τριγωνομετρικό, υπολογίζεται αν θέσουμε $\text{tg}\frac{x}{2} = t$. Ευκολότερα όμως υπολογίζεται ως εξής:

$$\int \frac{\sin x}{1+\sin x} dx = \int \frac{\sin x(1-\sin x)}{(1+\sin x)(1-\sin x)} dx = \int \frac{\sin x(1-\sin x)}{\cos^2 x} dx$$

$$= \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx - \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx$$

$$= \frac{1}{\cos x} - \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \frac{1}{\cos x} - \text{tg}x + x + c.$$

Τελειώνοντας, αξίζει να παρατηρήσουμε ότι δεν μπορούμε να υπολογίσουμε όλα τα αόριστα ολοκληρώματα που μπορούν να παρουσιαστούν. Για παράδειγμα το αόριστο ολοκλήρωμα της συναρτήσεως e^{-x^2}, που παίζει σημαντικό ρόλο στην Θεωρία Πιθανοτήτων, δεν μπορεί να εκφραστεί με την βοήθεια στοιχειωδών συναρτήσεων. Το ίδιο και το ολοκλήρωμα της συναρτήσεως $\frac{\sin x}{x}$ που τόσο συχνά συναντάμε στην Ανάλυση.

Τα παρακάτω ολοκληρώματα επίσης, εμφανίζονται συχνά στις εφαρμογές:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \quad (1)$$

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \quad (2)$$

$$\int \frac{dx}{(1+hx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \quad (3)$$

όπου $0 < k < 1$

Αυτά είναι γνωστά ως **ελλειπτικά ολοκληρώματα πρώτου, δευτέρου και τρίτου είδους αντίστοιχα**. Τα δύο πρώτα εξαρτώνται από μια παράμετρο k, ενώ το τρίτο από το k και μια πρόσθετη παράμετρο h.

Η αντικατάσταση $x = \sin\theta$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ τα μετασχηματίζει αντίστοιχα στα:

$$\int \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} \quad (1')$$

$$\frac{1}{k^2}\int\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}-\frac{1}{k^2}\int\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta \qquad (2')$$

$$\int\frac{d\theta}{(1+h\sin^2\theta)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} \qquad (3')$$

Οι μορφές (1'), (2'), (3') είναι γνωστές ως "μορφές του Legendre"

§ 1.10. ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 1

Σωστό ή λάθος;

① $\int(3x+2)^3dx=\frac{(3x+2)^4}{4}+c$ ΛΑΘΟΣ

② Αν $f'(x)=g(x)$ τότε $\int g(x)dx=f(x)+c$ Ναι

③ $\int x(x^2+1)dx=\frac{x^2}{2}\left(\frac{x^3}{3}+x\right)+c$ όχι

④ $\int(x^2+1)dx=\frac{1}{2x}\int(x^2+1)\,2xdx=\frac{1}{4x}(x^2+\_)^2+c$ όχι

⑤ $\int\frac{1}{x}dx=\log|cx|, c\neq 0$ ναι

⑥ $\int tgx\,dx=\frac{1}{\cos^2x}+c$ όχι

⑦ $\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=Arsinx+c$ όχι

⑧ Υπάρχουν σταθερές Α και Β τέτοιες ώστε: όχι

$$\frac{x^2-1}{(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}$$

⑨ Υπάρχουν σταθερές Α,Β και Γ τέτοιες ώστε: Λάθος

$$\frac{1}{(x-1)(2x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{2x-2}+\frac{\Gamma}{x-3}$$

⑩ Και οι τρεις ολοκληρώσεις είναι σωστές:

α) $\int 2\sin x\cdot\cos x dx=\int 2\sin x d\sin x=\sin^2x+c_1$

β) $\int 2\sin x\cdot\cos x dx=-\int 2\cos x d\cos x=-\cos^2x+c_2$

γ) $\int 2\sin x\cdot\cos x dx=\int\sin 2x dx=-\frac{1}{2}\cos 2x+c_3$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.32. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $\int e^{2x^2+\log x}dx$ β) $\int e^{kArccosx}dx$

γ) $\int\frac{\sqrt{\alpha^2-x^2}}{x}dx$ δ) $\int e^x\,\frac{1+x^2}{(1+x)^2}dx$

1.33. Επίσης τα ολοκληρώματα:

α) $\int\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,\frac{dx}{x^2}$ β) $\int\frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$

γ) $\int\frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx$ δ) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-2x\cos\alpha+1}}$

ε) $\int\frac{\sqrt{2x+1}}{x^2}dx$ στ) $\int\frac{\alpha+x}{x^2+\alpha x\log x}dx$

ζ) $\int\frac{\log x}{x^2(1-\log x)^2}dx$ η) $\int\frac{dx}{x\log x^{x}}$

1.34. Όμοια τα ολοκληρώματα:

α) $\int xe^{x^2}.(1+x^2)dx$ β) $\int\frac{\log(\alpha^2+\beta^2x^2)}{x^2}dx$

γ) $\int x\,tg^2x\,dx$ δ) $\int x\,Arsinx^2\,dx$

ε) $\int Arsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,dx$ στ) $\int Artg(1+\sqrt{x})dx$

ζ) $\int \frac{Arsinx}{x^2}\,dx$ η) $\int \frac{Artgx}{x^2(1+x^2)}\,dx$

1.35. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $\int \sqrt{e^x-1}\,dx$ β) $\int \frac{xe^x}{\sqrt{1+e^x}}\,dx$

γ) $\int \frac{xcosx}{(xsinx+cosx)^2}\,dx$ δ) $\int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}\,dx$

ε) $\int \frac{1}{x\sqrt{x}}\log\frac{1}{1-x}\,dx$ στ) $\int \frac{x\log x}{(x^2-1)^{3/2}}\,dx$

ζ) $\int x\log(1+x^3)dx$ η) $\int \frac{\log(cosx)}{cos^2x}\,dx$

1.36. Επίσης τα ολοκληρώματα:

α) $\int \sqrt{\frac{x}{(1-x)^3}}\,dx$ β) $\int \frac{x+2}{\sqrt{-x^2-3x}}\,dx$

γ) $\int \frac{x^2+x+1}{x\sqrt{x^2-x+1}}\,dx$ δ) $\int \frac{x^2-1}{x^2+1}\,\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$

ε) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}+4e^x+1}}$ στ) $\int \frac{1-2x}{x^2-2x+2}\,dx$

ζ) $\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx$ η) $\int \frac{2x-3}{(x^2-x+1)^2}\,dx$

1.37. Όμοια τα ολοκληρώματα:

α) $\int \frac{dx}{1+3cos^2x}$ β) $\int \frac{sinx+cosx}{\sqrt{sin2x}}\,dx$

γ) $\int \sqrt{tg^2x+2}\,dx$ δ) $\int \frac{dx}{1+sinx+cosx}$

ε) $\int \frac{dx}{(1+tgx)sin^2x}$ στ) $\int \frac{xcosx\cdot sinx}{(\alpha^2cos^2x+\beta^2sin^2x)^2}\,dx$

1.38. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $\int \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\,dx$ β) $\int \frac{\sqrt{1-x^3}}{x^2\sqrt{x}}\,dx$

γ) $\int \sqrt{\frac{1-\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}}\cdot\frac{dx}{x}$ δ) $\int x^2\sqrt{x^2-1}\,dx$

ε) $\int Artg\sqrt{1-x^2}\,dx$ στ) $\int Artgx\cdot\log(1+x^2)dx$

ζ) $\int \frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx$ η) $\int \frac{e^{kArtgx}}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx$

ολοκλήρωμα του Riemann 2

§ 2.1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι ρίζες του Ολοκληρωτικού Λογισμού πρέπει να αναζητηθούν στους Αρχαίους Έλληνες Γεωμέτρες, οι οποίοι εφήρμοσαν μια μέθοδο, που σήμερα λέγεται "**μέθοδος της εξάντλησης**",για να υπολογίσουν εμβαδά επίπεδων χωρίων με κυκλικό ή παραβολικό σύνορο. Η ιδέα της μεθόδου αυτής είναι η προσέγγιση του γεωμετρικού σχήματος του οποίου ζητάμε το εμβαδό με εγγεγραμμένα και περιγραμμένα σχήματα, των οποίων τα εμβαδά μπορούν να υπολογιστούν. Οι μεγαλοφυείς και ευρηματικοί Newton και Leibnitz, ακολουθώντας διαφορετική πορεία ο ένας από τον άλλο, έστρεψαν την προσοχή τους στον αντίστροφο χαρακτήρα της παραγώγισης και της ολοκλήρωσης, και ασχολήθηκαν με μεθόδους υπολογισμού αόριστων και ορισμένων ολοκληρωμάτων. Οι Riemann και Cauchy ήταν εκείνοι που έδωσαν την έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος σε αυστηρή Μαθηματική βάση.

Η ιστορία βέβαια δεν σταματάει εδώ. Στο τέλος του περασμένου αιώνα ο Stieltjes γενίκευσε το ολοκλήρωμα του Riemann, αντικαθιστώντας μια γραμμική συνάρτηση που εμφανίζεται στο ολοκλήρωμα του Riemann με άλλη πιο γενικού χαρακτήρα. Τέλος στις αρχές του αιώνα μας ανακλύφτηκε η έννοια του μέτρου ενός συνόλου πραγματικών αριθμών από τους Borel και

Lebesque και δόθηκε μια ακόμα γενίκευση του ολοκληρώματος του Riemann, γνωστή ως "**ολοκλήρωμα του Lebesque**" που θα γνωρίσετε σε μεγαλύτερα έτη.

§ 2.2. ΠΡΩΤΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ ΚΑΤΑ RIEMANN

Ας είναι $I=[\alpha,\beta]$ ένα κλειστό και φραγμένο διάστημα στο $\mathbb{R}$. Τότε μια **διαμέριση** του I είναι ένα πεπερασμένο, διατεταγμένο σύνολο $P=\{x_0,x_1,\dots,x_\nu\}$ σημείων του I, τέτοιων ώστε:

$$\alpha=x_0<x_1<x_2<\dots<x_{\nu-1}<x_\nu=\beta \tag{1}$$

(Βλέπε σχήμα 2.1)

Σχήμα 2.1

Έτσι με ν+1 σημεία που ικανοποιούν την (1) ορίζονται από την P τα ν διαστήματα $[x_0,x_1]$, $[x_1,x_2],\dots,[x_{\nu-1},x_\nu]$, που αποτελούν τα **τμήματα** της διαμέρισης P.

Έστω τώρα και μια φραγμένη συνάρτηση $f: I \to \mathbb{R}$. Ας είναι m και M αντίστοιχα το infimum και το supremum της f στο I. Προφανώς, αν $P=\{x_0,x_1,\dots,x_\nu\}$ είναι μια οποιαδήποτε διαμέριση του I, τότε η f είναι φραγμένη σε κάθε τμήμα της P. Ορίζουμε

$$\begin{matrix} m_k=\inf\{f(x):x\in[x_{k-1},x_k]\} \\ M_k=\sup\{f(x):x\in[x_{k-1},x_k]\} \end{matrix} \quad k=1,2,\dots,\nu$$

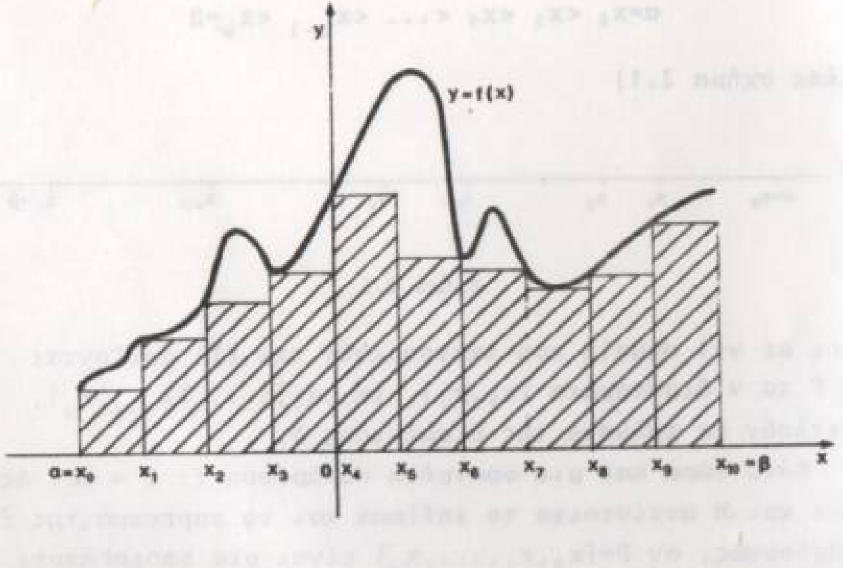
Το **κάτω άθροισμα** της f που αντιστοιχεί στην διαμέριση P ορίζεται ως εξής:

$$L(P,f)=\sum_{k=1}^{\nu} m_k(x_k-x_{k-1})$$

Επίσης το άνω άθροισμα της f που αντιστοιχεί στην διαμέριση P ορίζεται να είναι το

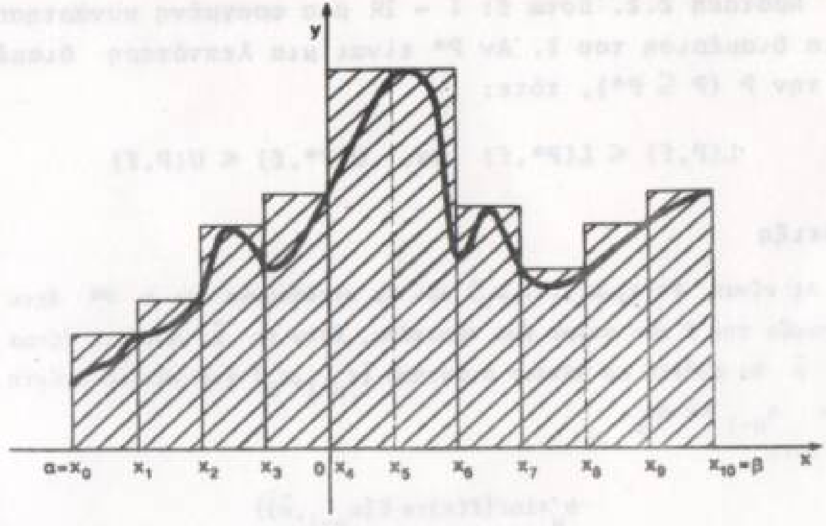
$$U(P,f)=\sum_{k=1}^{\nu} M_k(x_k-x_{k-1})$$

Αν η f είναι θετική συνάρτηση, τότε το κάτω άθροισμα L(P,f) μπορεί να ερμηνευτεί γεωμετρικά ως το εμβαδό της ένωσης των ορθογωνίων με βάση $[x_k-x_{k-1}]$ και ύψος m_k (Βλέπε σχήμα 2.2).



Σχήμα 2.2

Παρόμοια το άνω άθροισμα U(P,f) μπορεί να ερμηνευτεί γεωμετρικά ως το εμβαδό της ένωσης των ορθογωνίων με βάση $[x_k-x_{k-1}]$ και ύψος M_k (Βλέπε σχήμα 2.3). Από την γεωμετρική παράσταση φαίνεται ότι για την δοσμένη διαμέριση P, το κάτω άθροισμα είναι μικρότερο ή ίσο από το άνω άθροισμα. Θα αποδείξουμε τώρα ότι αυτό πραγματικά συμβαίνει.



Σχήμα 2.3

Πρόταση 2.1. Αν $f\colon I\to \mathbb{R}$ είναι μια φραγμένη συνάρτηση, και P είναι μια οποιαδήποτε διαμέριση του I, τότε: $L(P,f)\leq U(P,f)$.

Απόδειξη

Έστω $P=\{x_0,x_1,\dots,x_\nu\}$. Αφού $m_k\leq M_k$, $k=1,2,\dots,\nu$ και $x_k-x_{k-1}>0$, $k=1,2,\dots,\nu$ έχουμε:

$$L(P,f)=\sum_{k=1}^{\nu} m_k(x_k-x_{k-1})\leq\sum_{k=1}^{\nu} M_k(x_k-x_{k-1})=U(P,f).\ \blacksquare$$

Έστω τώρα μια διαμέριση $P=\{x_0,x_1,\dots,x_\nu\}$ του I. Τότε η διαμέριση $P^*=\{y_0,y_1,\dots,y_\mu\}$ του I θα λέγεται λ ε π τ ό τ ε ρ η από την διαμέριση P αν $P\subseteq P^*$, δηλ. αν κάθε σημείο $x_k\in P$ επίσης θα ανήκει και στην P^*. Με πιο απλά λόγια για να πάρουμε μια λεπτότερη διαμέριση P^* της P, αρκεί να προσθέσουμε έναν πεπερασμένο αριθμό σημείων στην διαμέριση P.

Παίρνοντας μια λεπτότερη διαμέριση, έχουμε ότι το κάτω άθροισμα αυξάνει, ενώ το άνω άθροισμα μικραίνει, όπως δεί-

Πρόταση 2.2. Έστω $f: I \to \mathbb{R}$ μια φραγμένη συνάρτηση και P μια διαμέριση του I. Αν P^* είναι μια λεπτότερη διαμέριση από την P ($P \subseteq P^*$), τότε:

$$L(P,f) \le L(P^*,f) \quad \text{και} \quad U(P^*,f) \le U(P,f)$$

Απόδειξη

Ας είναι $P=\{x_0,x_1,\dots,x_\nu\}$ και ας υποθέσουμε ότι η P^* έχει όλα τα σημεία της P και ακόμα ένα παραπάνω, έστω το $\bar{x}$. Αυτό το έξτρα σημείο $\bar{x}$ θα ανήκει σε κάποιο διάστημα $[x_{\mu-1},x_\mu]$ για κάποιο δείκτη μ. Έστω $x_{\mu-1}<\bar{x}<x_\mu$.

Έστω

$$m_\mu'=\inf\{f(x):x\in[x_{\mu-1},\bar{x}]\}$$

και

$$m_\mu''=\inf\{f(x):x\in[\bar{x},x_\mu]\}$$

Τότε προφανώς $m_\mu\le m_\mu'$ και $m_\mu\le m_\mu''$ [1]. Τα κάτω αθροίσματα που αντιστοιχούν στις διαμερίσεις P και P^*, αντίστοιχα, είναι:

$$L(P,f)=\sum_{k=1}^{\nu} m_k(x_k-x_{k-1})$$

και

$$L(P^*,f)=\sum_{k=1}^{\mu-1} m_k(x_k-x_{k-1})+m_\mu'(\bar{x}-x_{\mu-1})+m_\mu''(x_\mu-\bar{x}) + \sum_{k=\mu+1}^{\nu} m_k(x_k-x_{k-1})$$

Συνεπώς

$$L(P^*,f)-L(P,f)=m_\mu'(\bar{x}-x_{\mu-1})+m_\mu''(x_\mu-\bar{x})-m_\mu(x_\mu-x_{\mu-1})$$

$$=(m_\mu'-m_\mu)(\bar{x}-x_{\mu-1})+(m_\mu''-m_\mu)(x_\mu-\bar{x})$$

1) Απειροστικός Λογισμός 1, εφαρμογή 3 της §1.2.

Επειδή όλες οι παρενθέσεις είναι μη αρνητικές, θα έχουμε:

$$L(P^*,f)-L(P,f)\ge 0$$

που αποδεικνύει την πρώτη ανισότητα. Με εντελώς ανάλογο τρόπο αποδεικνύουμε και την δεύτερη ανισότητα, θέτοντας

$$M_\mu'=\sup\{f(x):x\in[x_{\mu-1},\bar{x}]\}$$

$$M_\mu''=\sup\{f(x):x\in[\bar{x},x_\mu]\}$$

και λαμβάνοντας υπόψη, ότι $M_\mu'\le M_\mu$ και $M_\mu''\le M_\mu$.

Ας υποθέσουμε τώρα γενικά ότι P^* είναι μια οποιαδήποτε διαμέριση λεπτότερη από την P. Τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε μια διαδοχή από διαμερίσεις $P_0,P_1,\dots,P_k$ έτσι ώστε $P_0=P$ και $P_k=P^*$ και ακόμα κάθε μια να είναι λεπτότερη από την προηγούμενη, έχοντας ακριβώς ένα παραπάνω σημείο από την προκατοχό της. Αυτό συνεπάγεται ότι

$$L(P,f)\le L(P_1,f)\le \dots \le L(P^*,f)$$

και

$$U(P,f)\ge U(P_1,f)\ge \dots \ge U(P^*,f)$$

Έτσι η πρόταση αποδείχτηκε πλήρως.■

Όπως είδαμε στην Πρόταση 2.1 το κάτω άθροισμα είναι μικρότερο ή ίσο από το άνω άθροισμα, αν και τα δυο αντιστοιχούν στην ίδια διαμέριση. Επίσης από την Πρόταση 2.2 είδαμε πως μια λεπτότερη διαμέριση αυξάνει τα κάτω αθροίσματα και ελαττώνει τα άνω αθροίσματα. Αυτά τα δυο συμπεράσματα μπορούν να συνδιαστούν και να συμπεράνουμε ότι το κάτω άθροισμα είναι πάντα μικρότερο ή ίσο από ένα άνω άθροισμα, ακόμα και αν αυτά αντιστοιχούν σε διαφορετικές διαμερίσεις.

Πρόταση 2.3. Έστω $f: I \to \mathbb{R}$ μια φραγμένη συνάρτηση και P_1,P_2 δυο οποιεσδήποτε διαμερίσεις του I. Τότε $L(P_1,f)\le U(P_2,f)$

Απόδειξη

Έστω $P^*=P_1 \cup P_2$ μια διαμέριση, που παίρνεται συνδυάζοντας τα σημεία των P_1 και P_2. Τότε η P^* είναι λεπτότερη και από την P_1 και από την P_2. Συνεπώς από την Πρόταση 2.2 έχουμε ότι $L(P_1,f) \leq L(P^*, f)$ και $U(P^*,f) \leq U(P_2,f)$. Επίσης από την Πρόταση 2.1 έχουμε ότι $L(P^*,f) \leq U(P^*,f)$. Συνεπώς

$$L(P_1,f) \leq L(P^*,f) \leq U(P^*,f) \leq U(P_2,f). \blacksquare$$

Παρατηρούμε ότι μια οποιαδήποτε διαμέριση P του διαστήματος $I=[\alpha,\beta]$ δίνει ένα ζεύγος αθροισμάτων, των άνω και κάτω αθροισμάτων. Θεωρώντας όλες τις δυνατές διαμερίσεις του I παίρνουμε ένα σύνολο U των άνω αθροισμάτων και ένα σύνολο L των κάτω αθροισμάτων.

Επειδή $m \leq m_k \leq M_k \leq M, k=1,2,\ldots,\nu$ θα έχουμε:

$$m(x_k-x_{k-1}) \leq m_k(x_k-x_{k-1}) \leq M_k(x_k-x_{k-1}) \leq M(x_k-x_{k-1})$$

θέτοντας $k=1,2,\ldots,\nu$ και προσθέτοντας όλες τις ανισότητες, παίρνουμε:

$$m(\beta-\alpha) \leq L(P,f) \leq U(P,f) \leq M(\beta-\alpha), \text{ P διαμέριση του I}$$

Η τελευταία ανισότητα δείχνει πως και τα δυο σύνολα των κάτω και άνω αθροισμάτων είναι φραγμένα και άρα το καθένα από αυτά έχει infimum και supremum.

Στα επόμενα θα συμβολίζουμε με $\mathcal{P}(I)$ το σύνολο όλων των δυνατών διαμερίσεων του I.

Θα δώσουμε τώρα τον επόμενο

Ορισμός 2.1. Έστω $f\colon I \to \mathbb{R}$ μια φραγμένη συνάρτηση. Ο αριθμός

$$L_f=\sup\{L(P,f):P \in \mathcal{P}(I)\}$$

λέγεται κάτω ολοκλήρωμα της f στο I, και ο αριθμός

$$U_f=\inf\{U(P,f):P \in \mathcal{P}(I)\}$$

λέγεται άνω ολοκλήρωμα της f στο I.

Πρόταση 2.4. Έστω $f\colon I \to \mathbb{R}$ μια φραγμένη συνάρτηση. Τότε το κάτω ολοκλήρωμα L_f και το άνω ολοκλήρωμα U_f της f, υπάρχουν και $L_f \leq U_f$.

Απόδειξη

Θεωρούμε μια σταθερή διαμέριση P_1 του I. Για οποιαδήποτε άλλη διαμέριση P_2 του I, από την Πρόταση 2.3 έχουμε ότι $L(P_1,f) \leq U(P_2,f)$. Συνεπώς το $L(P_1,f)$ είναι κάτω φράγμα για το σύνολο $\{U(P,f):P \in \mathcal{P}(I)\}$. Επομένως το $L(P_1,f)$ πρέπει να είναι μικρότερο ή ίσο από το infimum αυτού του συνόλου, δηλ.

$$L(P_1,f) \leq U_f \tag{1}$$

Η (1) δείχνει ότι το U_f είναι ένα άνω φράγμα για το σύνολο $\{L(P,f) : P \in \mathcal{P}(I)\}$ και επομένως $L_f \leq U_f$. $\blacksquare$

Παρατήρηση 2.1.

Από τον ορισμό 2.1, αφού το κάτω ολοκλήρωμα είναι το supremum του συνόλου των κάτω αθροισμάτων, για οποιοδήποτε $\varepsilon>0$ θα υπάρχει ένα κάτω άθροισμα (ή ισοδύναμα μια διαμέριση P_1) τέτοια ώστε:

$$L(P_1,f)>L_f-\varepsilon$$

Όμοια θα υπάρχει διαμέριση P_2 τέτοια ώστε:

$$U(P_2,f)<U_f+\varepsilon$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 2.4 για κάθε φραγμένη συνάρτηση ορισμένη σε κλειστό διάστημα, το άνω ολοκλήρωμα και το κάτω ολοκλήρωμα πάντα υπάρχουν και μάλιστα $L_f \leq U_f$. Μπορεί να είναι $L_f<U_f$, όπως θα δούμε στο παράδειγμα 2.3. Από την άλλη μεριά, για μια μεγάλη κλάση συναρτήσεων είναι $L_f=U_f$. Αυ-

τές τις συναρτήσεις τις λέμε "ολοκληρώσιμες", σύμφωνα με τον επόμενο

Ορισμός 2.2. Έστω $I=[\alpha,\beta]$ και $f: I \to \mathbb{R}$ μια φραγμένη συνάρτηση. Τότε η f θα λέγεται ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο I αν $L_f=U_f$. Η κοινή τιμή των L_f και U_f λέγεται ολοκλήρωμα κατά Riemann* της f στο διάστημα I και συμβολίζεται με

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx.$$

Επίσης ορίζουμε

$$\int_\beta^\alpha f(x)dx=-\int_\alpha^\beta f(x)dx \quad \text{και} \quad \int_\alpha^\alpha f(x)dx=0$$

Παρατήρηση 2.2.

Η έννοια του ολοκληρώματος κατά Riemann έχει εισαχθεί με δυο περιορισμούς:

i) η συνάρτηση f είναι φραγμένη και

ii) το διάστημα είναι πεπερασμένο.

Επίσης η έκφραση "το $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ υπάρχει", συνεπάγεται ότι η f είναι φραγμένη και ολοκληρώσιμη στο $[\alpha,\beta]$.

Παρατήρηση 2.3.

Προφανείς είναι οι παρακάτω ανισότητες:

$$m(\beta-\alpha)\leq \int_\alpha^\beta f(x)dx \leq M(\beta-\alpha)$$

και

$$m(\beta-\alpha) \leq L(P,f)\leq \int_\alpha^\beta f(x)dx \leq U(P,f) \leq M(\beta-\alpha)$$

Παρατήρηση 2.4.

Η μεταβλητή στο ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ είναι "βουβή" μεταβλητή. Έτσι $\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\omega)d\omega=\int_\alpha^\beta f(z)dz$ κ.τ.λ. Το ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ εξαρτάται μόνο από τα α και β που λέγονται ά κ ρ α ο λ ο κ λ η ρ ώ σ ε ω ς.

* ή ορισμένο ολοκλήρωμα

Παράδειγμα 2.1.

Μια σταθερή συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη. Πραγματικά· Έστω $f(x)=c$ $x\in[\alpha,\beta]$. Τότε για οποιαδήποτε διαμέριση P του $[\alpha,\beta]$ είναι $m_k=c=M_k$. Συνεπώς

$$\begin{aligned}L(P,f)&=\sum_{k=1}^{\nu} m_k(x_k-x_{k-1})\\&=\sum_{k=1}^{\nu} c(x_k-x_{k-1})\\&=c\sum_{k=1}^{\nu}(x_k-x_{k-1})\\&=c\{(x_1-x_0)+(x_2-x_1)+\cdots+(x_\nu-x_{\nu-1})\}\\&=c(x_\nu-x_0)=c(\beta-\alpha)\end{aligned}$$

και

$$U(P,f)=\sum_{k=1}^{\nu} M_k(x_k-x_{k-1})=c\sum_{k=1}^{\nu}(x_k-x_{k-1})=c(\beta-\alpha)$$

Άρα $L_f=c(\beta-\alpha)=U_f$ και επομένως η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha,\beta]$ και

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_\alpha^\beta c\cdot dx=c\cdot(\beta-\alpha)$$

Παράδειγμα 2.2.

Έστω $f(x)=x, x\in[0,1]$. Χωρίζουμε το διάστημα $[0,1]$ σε ν ίσα υποδιαστήματα, παίρνοντας έτσι την παρακάτω ακολουθία διαμερίσεων

$$P_\nu=\left\{0,\frac{1}{\nu},\frac{2}{\nu},\ldots,\frac{\nu-1}{\nu},\frac{\nu}{\nu}=1\right\}$$

Αφού η f είναι αύξουσα συνάρτηση θα παίρνει το infimum και το supremum στο τυχαίο υποδιάστημα $\left[\frac{k-1}{\nu}, \frac{k}{\nu}\right]$, αντίστοιχα στο αριστερό και δεξιό άκρο, δηλ.

$$m_k=\frac{k-1}{\nu} \quad \text{και} \quad M_k=\frac{k}{\nu}$$

Επίσης $x_k-x_{k-1}=\frac{1}{\nu}$, k,1,2,...,ν. Συνεπώς:

$$L(P_\nu,x)=\sum_{k=1}^{\nu} m_k(x_k-x_{k-1})=\sum_{k=1}^{\nu}\frac{k-1}{\nu}\cdot\frac{1}{\nu}$$

$$=\frac{1}{\nu^2}\,(0+1+\cdots+(\nu-1))=\frac{(\nu-1)\nu}{2\nu^2}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\nu}\right)$$

και

$$U(P_\nu,x)=\sum_{k=1}^{\nu} M_k(x_k-x_{k-1})=\sum_{k=1}^{\nu}\frac{k}{\nu}\cdot\frac{1}{\nu}$$

$$=\frac{1}{\nu^2}\,(1+2+\cdots+\nu)=\frac{\nu(\nu+1)}{2\nu^2}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\nu}\right).$$

Αφού το σύνολο των διαμερίσεων $\{P_\nu, \nu\in\mathbb{N}\}$ είναι υποσύνολο του συνόλου όλων των διαμερίσεων $\mathcal{P}(I)$, I=[0,1], συνεπάγεται ότι:

$$\frac{1}{2}=\sup\{L(P_\nu,x),\nu\in\mathbb{N}\}\leqslant\sup\{L(P,x),P\in\mathcal{P}(I)\}=L_f$$

και

$$U_f=\inf\{U(P,x),P\in\mathcal{P}(I)\}\leqslant\inf\{U(P_\nu,x),\nu\in\mathbb{N}\}=\frac{1}{2}$$

Δηλαδή $\frac{1}{2}\leqslant L_f\leqslant U_f\leqslant\frac{1}{2}$ και άρα $L_f=U_f=\frac{1}{2}$.

Αυτό σημαίνει ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο [0,1] και

$$\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2}$$

Παράδειγμα 2.3.

Θεωρούμε την συνάρτηση $f\colon [0,1]\to\mathbb{R}$ με

$$f(x)=\begin{cases}1, & x \text{ ρητός}\\ 0, & x \text{ άρρητος}\end{cases}$$

Αν $P=\{x_0,x_1,\dots,x_\nu\}$ είναι μια διαμέριση του [0,1], τότε αφού κάθε υποδιάστημά της περιέχει και ρητούς και άρρητους, θα έχουμε: $m_k=0$ και $M_k=1$. Συνεπώς

$$L(P,f)=0,\ U(P,f)=1$$

Αυτά συνεπάγονται ότι $L_f=0$ και $U_f=1$, δηλ. $L_f\neq U_f$ και επομένως η f δεν είναι ολοκληρώσιμη στο [0,1].

Θα τελειώσουμε την παράγραφο αυτή αποδεικνύοντας ένα βασικό θεώρημα, που οφείλεται στον Darboux. Για τον σκοπό αυτό χρειαζόμαστε τον επόμενο Ορισμό και το Λήμμα.

Ορισμός 2.3. Για κάθε διαμέριση P του I=[α,β] το μήκος του μεγαλύτερου υποδιαστήματος το λέμε norm ή λεπτότητα της διαμερίσεως και το συμβολίζουμε με ||P|| ή λ(P), δηλ.

$$||P||=\max\{x_1-x_0,x_2-x_1,\dots,x_\nu-x_{\nu-1}\}$$

$$=\max\{(x_k-x_{k-1}),k=1,2,\dots,\nu\}$$

Λήμμα: Υποθέτουμε ότι $|f(x)|\leqslant K$, $\forall x\in[\alpha,\beta]=I$. Έστω P^* είναι μια λεπτότερη διαμέριση του I, που προκύπτει προσθέτοντας m σημεία σε μια διαμέριση P του I. Τότε:

$$L(P,f)\leqslant L(P^*,f)\leqslant L(P,f)+2Km||P|| \tag{1}$$

και

$$U(P,f)\geqslant U(P^*,f)\geqslant U(P,f)-2Km||P|| \tag{2}$$

Απόδειξη

Στην Πρόταση 2.2 αποδείξαμε ότι $L(P,f)\leqslant L(P^*,f)$. Συνεπώς αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$L(P^*,f)-L(P,f)\leqslant 2Km||P||$$

Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή. Έστω m=1 και $\bar{x}$ είναι ένα παρακάνω σημείο της διαμέρισης $P=\{x_0,x_1,\dots,x_\nu\}$. Τότε αφού $-K\leqslant m_\mu\leqslant m_\mu'\leqslant K$ [1] θα έχουμε: $0 \le m'_\mu - m_\mu \le 2K$. Παρόμοια έχουμε: $0 \le m''_\mu - m_\mu \le 2K$. Συνεπώς

$$L(P^*,f)-L(P,f)=(m'_\mu-m_\mu)(\bar{x}-x_{\mu-1})+(m''_\mu-m_\mu)(x_\mu-\bar{x})$$

$$\le 2K(x_\mu-x_{\mu-1}) \le 2K\|P\|$$

Υποθέτουμε τώρα ότι τα υπόλοιπα $m-1$ σημεία προστίθενται ένα προς ένα. Τότε επαναλαμβάνοντας την παραπάνω διαδικασία m φορές παίρνουμε:

$$L(P^*,f)-L(P,f) \le 2Km\|P\|$$

δηλ. την πρώτη ανισότητα. Για την δεύτερη αρκεί να εφαρμόσουμε τα παραπάνω στην $-f$. ■

Θεώρημα 2.1. (Θεώρημα του Darboux). Έστω $f: I \to \mathbb{R}$ μια φραγμένη συνάρτηση. Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε:

$$U(P,f) < U_f + \varepsilon \qquad (1)$$

και

$$L(P,f) > L_f - \varepsilon \qquad (2)$$

για κάθε διαμέριση P του I, με $\|P\| < \delta$.

Απόδειξη

Ας αποδείξουμε μόνο την (1), μιας και η (2) αποδεικνύεται ανάλογα. Αφού η f είναι φραγμένη, θα υπάρχει $K > 0$, τέτοιο ώστε:

$$|f(x)| \le K, \ \forall x \in I.$$

Από την παρατήρηση 2.1 υπάρχει διαμέριση P_2 του I, τέτοια ώστε:

$$U(P_2,f) < U_f + \frac{\varepsilon}{2} \qquad (3)$$

Έστω $P_2=\{x_0,x_1,\dots,x_{m+1}\}$. Αν τώρα P είναι τυχαία διαμέριση του I, ας είναι $P^*=P \cup P_2$. Τότε η P^* είναι λεπτότερη από την P_2 και άρα από την Πρόταση 2.2 έχουμε

$$U(P^*,f) \le U(P_2,f) \qquad (4)$$

Επειδή $|f(x)| \le K$, από το Λήμμα αφού η P^* έχει το πολύ m περισσότερα σημεία από την P, έχουμε:

$$U(P,f) - 2Km\|P\| < U(P^*,f) \qquad (5)$$

Από τις (3), (4) και (5) αν $\|P\| < \delta = \frac{\varepsilon}{4Km}$ έχουμε:

$$U(P,f) \le U_f + \frac{\varepsilon}{2} + 2Km\|P\| < U_f + \varepsilon \ ■$$

§ 2.3. ΔΕΥΤΕΡΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ ΚΑΤΑ RIEMANN

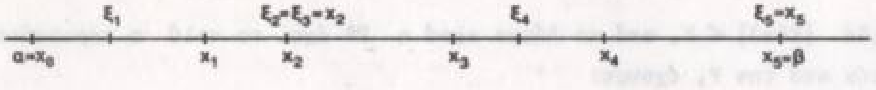
Σκοπός μας σ'αυτή την παράγραφο είναι να δώσουμε έναν διαφορετικό ορισμό για το ολοκλήρωμα του Riemann, που όπως θα δούμε είναι ισοδύναμος με τον πρώτο ορισμό.

Στην προηγούμενη παράγραφο προσεγγίσαμε το ολοκλήρωμα μιας συναρτήσεως μέσω των άνω και κάτω αθροισμάτων της. Οι αριθμοί M_k και m_k που εμφανίζονται σ'αυτά τα αθροίσματα δεν είναι αναγκαστικά και τιμές της συναρτήσεως (αυτοί είναι τιμές της f αν η f είναι συνεχής). Θα αποδείξουμε τώρα ότι το ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ μπορεί να θεωρηθεί ως όριο μιας ακολουθίας αθροισμάτων, στα οποία τα M_k και m_k αντικαθίστανται από τιμές της f.

Έστω $P=\{x_0,x_1,\dots,x_\nu\}$ μια διαμέριση του διαστήματος $[\alpha,\beta]$. Το σύνολο $\Xi=\{\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_\nu\}$ το οποίο περιέχει το πολύ ν σημεία με την ιδιότητα:

$$x_{k-1} \le \xi_k \le x_k, \ k=1,2,\dots,\nu$$

λέμε ότι αποτελεί μια **επιλογή ενδιάμεσων σημείων** της διαμέρισης P. (Βλέπε σχήμα 2.4).



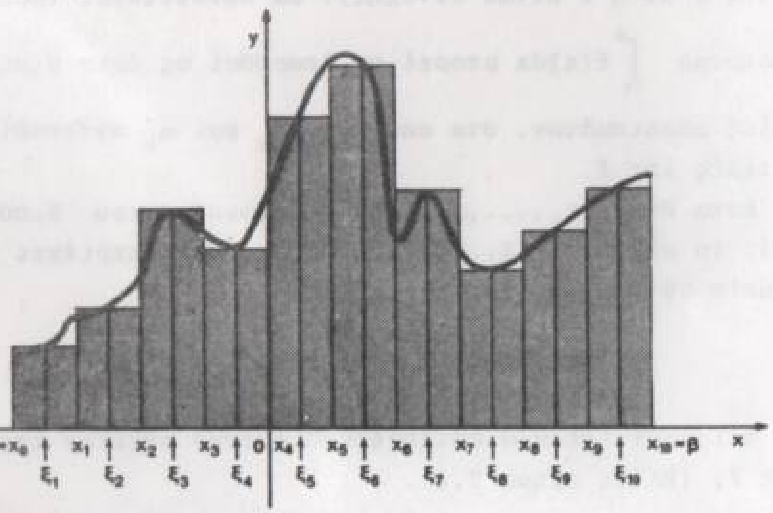
Σχήμα 2.4

Παρατηρούμε ότι δυο διαδοχικά σημεία του Ξ μπορούν να ταυτίζονται.

Έστω τώρα μια συνάρτηση f ορισμένη στο $I=[\alpha,\beta]$, P μια διαμέριση του I και Ξ μια επιλογή ενδιάμεσων σημείων της P. Τότε ορίζουμε ως **άθροισμα του Riemann** της f που αντιστοιχεί στην διαμέριση P και στην τυχαία επιλογή ενδιάμεσων σημείων της Ξ, τον αριθμό

$$S(P,f,\Xi)=\sum_{k=1}^{\nu} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})$$

Είναι προφανές ότι για την *ίδια* διαμέριση P του I υπάρχουν άπειρα αθροίσματα του Riemann που αντιστοιχούν στις διάφορες επιλογές των ενδιάμεσων σημείων της P.



Σχήμα 2.5

Στην περίπτωση που η f είναι θετική και συνεχής (Βλέπε σχήμα 2.5) το άθροισμα του Riemann παριστάνει γεωμετρικά το εμβαδό της ένωσης των ορθογωνίων με βάση x_k-x_{k-1} και ύψος $f(\xi_k)$.

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι σε αντιδιαστολή με τα άνω και κάτω αθροίσματα, το φράξιμο της f δεν είναι προϋπόθεση για να οριστεί το άθροισμα του Riemann. Αν η f είναι φραγμένη, τότε για οποιαδήποτε διαμέριση P του I, και οποιαδήποτε επιλογή ενδιάμεσων σημείων της Ξ, έχουμε:

$$m_k \leq f(\xi_k) \leq M_k,\ k=1,2,\dots,\nu$$

και

$$\sum_{k=1}^{\nu} m_k(x_k-x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^{\nu} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^{\nu} M_k(x_k-x_{k-1})$$

Συνεπώς

$$L(P,f) \leq S(P,f,\Xi) \leq U(P,f)$$

Αυτό σημαίνει ότι το άθροισμα του Riemann της f που αντιστοιχεί στην διαμέριση P, βρίσκεται μεταξύ του κάτω αθροίσματος και του άνω αθροίσματος της f που αντιστοιχούν στην P, αδιάφορο από το πως θα εκλέξουμε τα ενδιάμεσα σημεία της P. Αν τα κάτω και άνω φράγματα m_k και M_k της f στα $[x_{k-1},x_k]$, $k=1,2,\dots,\nu$ είναι και τιμές της συναρτήσεως, τότε τα κάτω και άνω αθροίσματα είναι ίσα με το άθροισμα του Riemann, για μια κατάλληλη εκλογή των ενδιάμεσων σημείων. Γενικά όμως αυτό δεν ισχύει (αφού τα m_k και M_k μπορεί να μην είναι τιμές της f).

Παρατήρηση 2.5.

Είναι εύκολο να δούμε ότι το κάτω άθροισμα είναι το infimum του συνόλου των αθροισμάτων του Riemann, ενώ το άνω άθροισμα είναι το supremum του συνόλου των αθροισμάτων του Riemann αν η f είναι συνεχής

Πραγματικά έχουμε:

$$L(P,f)=\sum_{k=1}^{\nu} m_k(x_k-x_{k-1})=\sum_{k=1}^{\nu}\inf\{f(\xi_k):\xi_k\in[x_{k-1},x_k]\}\cdot(x_k-x_{k-1})$$

$$=\inf\left\{\sum_{k=1}^{\nu} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1}):\forall\, k=1,2,\ldots,\nu, x_{k-1}\leqslant\xi_k\leqslant x_k\right\}$$

$$=\inf\{S(P,f,\Xi):\ \Xi \text{ επιλογή ενδιάμεσων σημείων της } P\}.$$

και ανάλογα

$$U(P,f)=\sum_{k=1}^{\nu} M_k(x_k-x_{k-1})=\sum_{k=1}^{\nu}\sup\{f(\xi_k):\xi_k\in[x_{k-1},x_k]\}(x_k-x_{k-1})$$

$$=\sup\left\{\sum_{k=1}^{\nu} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1}):\ \forall k=1,2,\ldots,\nu, x_{k-1}\leqslant\xi_k\leqslant x_k\right\}$$

$$=\sup\{S(P,f,\Xi):\ \Xi \text{ επιλογή ενδιάμεσων σημείων της } P\}.$$

Είμαστε τώρα σε θέση να δώσουμε τον επόμενο

Ορισμός 2.4. Μια συνάρτηση f θα λέγεται ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο διάστημα $I=[\alpha,\beta]$ αν υπάρχει ένας αριθμός A με την ιδιότητα: Για κάθε $\varepsilon>0$, υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο ώστε κάθε άθροισμα του Riemann της f που αντιστοιχεί στην διαμέριση $P=\{x_0,x_1,\ldots,x_\nu\}$ του I με $\|P\|<\delta$ ικανοποιεί την ανισότητα:

$$|S(P,f,\Xi)-A|<\varepsilon$$

για κάθε επιλογή ενδιάμεσων σημείων Ξ της P. Ο αριθμός A λέγεται ολοκλήρωμα του Riemann της f στο I και συμβολίζεται

με $\int_\alpha^\beta f(x)dx$, δηλ. $A=\int_\alpha^\beta f(x)dx$

Παρατήρηση 2.6.

Ο ορισμός 2.4 λέει ότι η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στι I αν το $\lim S(P,f,\Xi)$ υπάρχει όταν $\|P\|\to 0$ και τότε

$$\lim_{\|P\|\to 0} S(P,f,\Xi)=\int_\alpha^\beta f(x)dx$$

Θεώρημα 2.2. Αν η $f\ I=[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο I σύμφωνα με τον ορισμό 2.4, τότε αυτή είναι φραγμένη στο I.

Απόδειξη

Ας υποθέσουμε ότι η f δεν είναι φραγμένη στο $I=[\alpha,\beta]$. Αφού είναι ολοκληρώσιμη σύμφωνα με τον ορισμό 2.4, θα υπάρχουν $A>0$ και $\delta>0$ τέτοια ώστε αν $P=\{x_0,x_1,\ldots,x_\nu\}$ είναι μια διαμέριση του I με $\|P\|<\delta$ και $\Xi=\{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_\nu\}$ μια επιλογή ενδιάμεσων σημείων της P να έχουμε:

$$|S(P,f,\Xi)-A|=\left|\sum_{k=1}^{\nu} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})-A\right|<1\ . \tag{1}$$

Σταθεροποιώ μια διαμέριση P. Τότε τουλάχιστο σε ένα τμήμα της P, έστω το $[x_{\lambda-1},x_\lambda]=I_\lambda$, η f δεν είναι φραγμένη, αφού δεν είναι φραγμένη στο I. Αλλά τότε η (1) γράφεται:

$$|f(\xi_\lambda)(x_\lambda-x_{\lambda-1})|-\left|\sum_{\substack{k=1\\k\neq\lambda}}^{\nu} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})-A\right|<1$$

ή

$$|f(\xi_\lambda)|<\frac{1}{x_\lambda-x_{\lambda-1}}\left\{1+\left|\sum_{\substack{k=1\\k\neq\lambda}}^{\nu} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})-A\right|\right\}. \tag{2}$$

Ας σταθεροποιήσουμε τώρα όλα τα ξ_k, $k\neq\lambda$, $k=1,2,\ldots,\nu$. Τότε το δεξιό μέλος της (2) είναι σταθερός αριθμός. Αυτό όμως σημαίνει ότι η f είναι φραγμένη στο I_λ, πράγμα άτοπο. Επομένως αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο I, τότε αυτή είναι φραγμένη στο I.

Θα αποδείξουμε τώρα ένα θεώρημα που είναι ανάλογο με το κριτήριο του Cauchy για τις ακολουθίες, και αφορά τα αθροίσματα του Riemann.

Θεώρημα 2.3. Μια συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha,\beta]$, αν και μόνο αν, για κάθε $\varepsilon>0$, υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο ώστε αν P_1 και P_2 είναι δυο διαμερίσεις του $[\alpha,\beta]$ με $\|P_1\|<\delta$ και $\|P_2\|<\delta$ να έχουμε:

$$|S(P_1,f,\Xi_1)-S(P_2,f,\Xi_2)|<\varepsilon$$

για οποιεσδήποτε επιλογές ενδιάμεσων σημείων Ξ_1 και Ξ_2 των διαμερίσεων P_1 και P_2 αντίστοιχα.

Απόδειξη

Έστω ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha,\beta]$ και

$$A=\int_\alpha^\beta f(x)dx$$

Τότε, για κάθε $\varepsilon>0$, υπάρχει $\delta>0$, τέτοιο ώστε για όλες τις διαμερίσεις P_1 και P_2 του $[\alpha,\beta]$ με $||P_1||<\delta$ και $||P_2||<\delta$, και για οποιεσδήποτε επιλογές ενδιάμεσων σημείων των, έχουμε:

$$|S(P_1,f,\Xi_1)-A|<\frac{\varepsilon}{2}$$

$$|S(P_2,f,\Xi_2)-A|<\frac{\varepsilon}{2}$$

Συνεπώς

$$|S(P_1,f,\Xi_1)-S(P_2,f,\Xi_2)|<|S(P_1,f,\Xi_1)-A|+|S(P_2,f,\Xi_2)-A| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Αντίστροφα τώρα, έστω ότι για κάθε $\varepsilon>0$, υπάρχει $\delta_1>0$ τέτοιο ώστε για τυχαίες διαμερίσεις P_1 και P_2 με $||P_1||<\delta_1$ και $||P_2||<\delta_1$ να έχουμε:

$$|S(P_1,f,\Xi_1)-S(P_2,f,\Xi_2)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

Όπως γνωρίζουμε, για δοσμένη διαμέριση P_1 και οποιαδήποτε επιλογή ενδιάμεσων σημείων της, το $S(P_1,f,\Xi_1)$ είναι φραγμένο από τα $L(P_1,f)$ και $U(P_1,f)$. Συνεπώς η ακολουθία $S(P_1,f,\Xi_1)$, $P_1\in\mathcal{P}(I)$ των αθροισμάτων του Riemann είναι φραγμένη. Επειδή κάθε φραγμένη ακολουθία έχει ένα σημείο συσσωρεύσεως, έστω ότι

$$\lim_{||P_1||\to 0} S(P_1,f,\Xi_1)=A$$

δηλαδή για κάθε $\varepsilon>0$, υπάρχει $\delta_2>0$, τέτοιο ώστε για κάθε διαμέριση P_1 με $||P_1||<\delta_2$ και οποιαδήποτε επιλογή ενδιάμεσων σημείων της, να ισχύει:

$$|S(P_1,f,\Xi_1)-A|<\frac{\varepsilon}{2}$$

Έστω $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$. Τότε:

$$|S(P_2,f,\Xi_2)-A|\leq|S(P_2,f,\Xi_2)-S(P_1,f,\Xi_1)|+ +|S(P_1,f,\Xi_1)-A|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

αν $||P_2||<\delta$.

Συνεπώς $\lim\limits_{||P_2||\to 0} S(P_2,f,\Xi_2)=A$. Έτσι λοιπόν το $\lim\limits_{||P||\to 0} S(P,f,\Xi)$ υπάρχει, που σημαίνει ότι η f είναι ολοκληρώσιμη. ∎

Παρατήρηση 2.7.

Επειδή ισχύει το θεώρημα 2.3, γι' αυτό θα θεωρούμε μόνο φραγμένες συναρτήσεις ανεξάρτητα αν εφαρμόζουμε τον πρώτο ή τον δεύτερο ορισμό για το ολοκλήρωμα του Riemann.

Παρατήρηση 2.8.

Στις εφαρμογές συνήθως ως ενδιάμεσα σημεία διαλέγουμε τα αριστερά ή τα δεξιά άκρα της διαμερίσεως.

Παράδειγμα 2.4.

Είναι $\int_1^2 (3x+1)dx=\frac{11}{2}$

Πραγματικά· Έστω $P=\{x_0,x_1,\ldots,x_\nu\}$ μια διαμέριση του $[1,2]$ η οποία χωρίζει το $[1,2]$ σε ν ίσα υποδιαστήματα, που το κάθε ένα έχει μήκος $\frac{2-1}{\nu}=\frac{1}{\nu}$. Τότε $||P||=\frac{1}{\nu}\to 0$ και

$$x_k=1+\frac{k}{\nu},\ k=1,2,\ldots,\nu$$

δηλ.

$$P=\left\{1,1+\frac{1}{\nu},1+\frac{2}{\nu},\ldots,1+\frac{\nu}{\nu}=2\right\}$$

Διαλέγουμε ως ενδιάμεσα σημεία τα δεξιά άκρα της διαμέρισης P και σχηματίζουμε το άθροισμα του Riemann

$$S(P,f,\Xi)=\sum_{k=1}^{\nu} f(x_k)(x_k-x_{k-1})=\sum_{k=1}^{\nu}(3x_k+1)\frac{1}{\nu}$$

$$= \sum_{k=1}^{\nu} \left\{3\left(1+\frac{k}{\nu}\right)+1\right\}\cdot\frac{1}{\nu} = 4\sum_{k=1}^{\nu}\frac{1}{\nu}+3\sum_{k=1}^{\nu}\frac{k}{\nu^2} = 4+\frac{3}{\nu^2}\cdot\frac{\nu(\nu+1)}{2}$$

Συνεπώς $\lim\limits_{\|P\|\to 0} S(P,f,\Xi) = 4+\frac{3}{2} = \frac{11}{2} = \int_1^2 (3x+1)dx$

Ας υπολογίσουμε το παραπάνω ολοκλήρωμα, θεωρώντας ως ενδιάμεσα σημεία τα μέσα των τμημάτων της διαμέρισης P. Θα είναι $\xi_k = \frac{x_{k-1}+x_k}{2}$, $k=1,2,\dots,\nu$ και επομένως

$$S(P,f,\Xi) = \sum_{k=1}^{\nu} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{\nu} (3\xi_k+1)(x_k-x_{k-1})$$

$$= \frac{3}{2}\sum_{k=1}^{\nu} (x_k^2-x_{k-1}^2) + \sum_{k=1}^{\nu} (x_k-x_{k-1}) = \frac{11}{2}.$$

Θα αποδείξουμε τώρα ότι οι δυο ορισμοί για το ολοκλήρωμα του Riemann είναι ισοδύναμοι.

Θεώρημα 2.4. Οι ορισμοί 2.2 και 2.4 είναι ισοδύναμοι

Απόδειξη

1) Ορισμός 2.2 ⇒ Ορισμό 2.4.

Έστω ότι η φραγμένη συνάρτηση $f: I=[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη σύμφωνα με τον ορισμό 2.2. Τότε $L_f=U_f=A$. Έστω P μια διαμέριση του I με $\|P\|<\delta$. Τότε, για $\varepsilon>0$, από το Θεώρημα 2.1 του Darboux, έχουμε:

$$L_f-\varepsilon < L(P,f) \le U(P,f) \le U_f+\varepsilon \qquad (1)$$

Αλλά

$$L(P,f) \le S(P,f,\Xi) \le U(P,f) \qquad (2)$$

για οποιοδήποτε άθροισμα του Riemann που αντιστοιχεί στην P και για κάθε επιλογή Ξ ενδιάμεσων σημείων της.

Από τις (1), (2) και από το ότι $L_f=U_f=A$ παίρνουμε:

$$A-\varepsilon < S(P,f,\Xi) < A+\varepsilon$$

αν $\|P\|<\delta$, δηλ. τον Ορισμό 2.4.

Ορισμός 2.4 ⟹ Ορισμός 2.2

Έστω ότι η f είναι ολοκληρώσιμη σύμφωνα με τον Ορισμό 2.4. Τότε $(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)$($\forall$ διαμέριση P, με $\|P\|<\delta$) ($\forall$ επιλογή ενδιάμεσων σημείων της P) να έχουμε: $A-\frac{\varepsilon}{2} < S(P,f,\Xi) < A+\frac{\varepsilon}{2}$.

Από τον ορισμό των M_k και m_k υπάρχουν $\xi_k', \zeta_k \in [x_{k-1},x_k]$:

$$M_k - \frac{\varepsilon}{2(\beta-\alpha)} < f(\xi_k') \text{ και } f(\zeta_k) < m_k + \frac{\varepsilon}{2(\beta-\alpha)}.$$

Πολ/ζοντας με (x_k-x_{k-1}) και αθροίζοντας παίρνουμε:

$$U(P,f)-\frac{\varepsilon}{2} < S(P,f,\Xi') < A+\frac{\varepsilon}{2} \text{ και } A-\frac{\varepsilon}{2} < S(P,f,\Xi'') < L(P,f)+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Από αυτές έχουμε:

$$U_f-L_f < U(P,f)-L(P,f) < 2\varepsilon,\ \forall\varepsilon>0$$

που σημαίνει ότι $U_f=L_f$ και έτσι παίρνουμε τον Ορισμό 2.2.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

(Ολοκλήρωμα Riemann-Stieltjes). Έστω $f,g:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$. Θα λέμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann-Stieltjes ως προς την g στο $[\alpha,\beta]$, αν υπάρχει αριθμός I με την ιδιότητα: $(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)$($\forall$ διαμέριση P του $[\alpha,\beta]$)($\forall$ επιλογή Ξ ενδιάμεσων σημείων της P) να ισχύει:

$$\|P\|<\delta \Rightarrow \left|\sum_{k=1}^{\nu} f(\xi_k)[g(x_k)-g(x_{k-1})]-I\right| < \varepsilon$$

Γράφουμε $I=\int_\alpha^\beta f(x)dg(x)$. (Παρατηρούμε ότι για $g(x)=x$, $\forall x\in[\alpha,\beta]$ έχουμε το ολοκλήρωμα του Riemann). Να αποδείξετε ότι:

α) $\int_\alpha^\beta f(x)dg(x)=0$ με f αυθαίρετη και $g(x)=k$, k σταθερή

β) $\int_\alpha^\beta k\,dg(x)=k[g(\beta)-g(\alpha)]$ με g αυθαίρετη και $f(x)=k$.

β) $\int_0^1 x\,dx^2=\frac{2}{3}$

Απόδειξη

α) Για οποιαδήποτε διαμέριση P του $[\alpha,\beta]$ και οποιαδήποτε επιλογή ενδιάμεσων σημείων της P θα έχουμε:

$$\sum_{k=1}^{\nu} f(\xi_k)[g(x_k)-g(x_{k-1})]=\sum_{k=1}^{\nu} f(\xi_k)[k-k]=0$$

(Δηλαδή το ολοκλήρωμα κατά Riemann-Stieltjes υπάρχει και αν ακόμα η f δεν είναι φραγμένη στο $[\alpha,\beta]$).

β) Θα έχουμε:

$$\sum_{k=1}^{\nu} f(\xi_k)[g(x_k)-g(x_{k-1})]=k\sum_{k=1}^{\nu}[g(x_k)-g(x_{k-1})]=k[g(\beta)-g(\alpha)]$$

δηλ.

$$\int_\alpha^\beta k\,dg(x)=k[g(\beta)-g(\alpha)]$$

γ) Θεωρούμε την διαμέριση $P_\nu=\left\{0,\frac{1}{\nu},\frac{2}{\nu},\dots,1\right\}$ και ενδιάμεσα σημεία τα δεξιά άκρα των τμημάτων της διαμέρισης. Θα έχουμε:

$$\sum_{k=1}^{\nu} f(\xi_k)[g(x_k)-g(x_{k-1})]=\sum_{k=1}^{\nu} f\left(\frac{k}{\nu}\right)\left[g\left(\frac{k}{\nu}\right)-g\left(\frac{k-1}{\nu}\right)\right]$$

$$=\sum_{k=1}^{\nu}\frac{k}{\nu}\left[\frac{k^2}{\nu^2}-\frac{(k-1)^2}{\nu^2}\right]=\frac{1}{\nu^3}\sum_{k=1}^{\nu}(2k^2-k)$$

$$=\frac{1}{\nu^3}\left\{2\sum_{k=1}^{\nu}k^2-\sum_{k=1}^{\nu}k\right\}$$

$$=\frac{1}{\nu^3}\left[2(1^2+2^2+\cdots+\nu^2)-(1+2+\cdots+\nu)\right]$$

$$=\frac{1}{\nu^3}\left\{2\,\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}-\frac{\nu(\nu+1)}{2}\right\}=\frac{(\nu+1)(4\nu-1)}{6\nu^2}$$

Συνεπώς

$$\int_0^1 x\,dx^2=\lim\frac{(\nu+1)(4\nu-1)}{6\nu^2}=\frac{2}{3}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

2.1. α) Έστω $f(x)=\sin x$, $x\in[0,\pi]$. Να υπολογίσετε τα $L(P,f)$ και $U(P,f)$ χωρίζοντας το διάστημα $[0,\pi]$ σε 3 ή 6 ίσα υποδιαστήματα.

β) Να υπολογίσετε τα $L(P,f)$ και $U(P,f)$ αν $P=\{0,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2\}$ και

$f(x)=1,\ 0\le x<1,\ f(x)=x+1,\ 1\le x<2,\ f(x)=4,\ x=2.$

γ) Έστω $f(x)=4-x$, $x\in[1,3]$. Να υπολογίσετε τα $L(P,f)$ και $U(P,f)$ χωρίζοντας το $[1,3]$ σε ν ίσα τμήματα.

2.2 Να αποδείξετε ότι η $f(x)=x^2$, $x\in[0,1]$ είναι ολοκληρώσιμη.

2.3. Να αποδείξετε ότι:

α) $\int_{-1}^{1}|x|dx=1$

β) $\int_{0}^{1}f(x)dx=\frac{1}{2}$ όπου $f(x)=\begin{cases}0, & 0\le x\le 1/2\\ 1, & \frac{1}{2}<x\le 1.\end{cases}$

2.4. α) Να υπολογίσετε το $\int_1^2 x^2dx$ διαιρώντας το $[1,2]$ i) σε ν ίσα τμήματα ii) με σημεία που να αποτελούν γεωμετρική πρόοδο.

β) Για την $f(x)=2x^2-4x$, $x\in[0,1]$ να υπολογίσετε το S χωρίζοντας το $[0,1]$ σε ν ίσα τμήματα και θεωρώντας ως ενδιάμεσα σημεία τα μέσα των τμημάτων της διαμέρισης.

γ) Να υπολογίσετε το $\int_1^\beta \frac{1}{x^2}dx$ i) χωρίζοντας το $[1,\beta]$ σε ν ίσα τμήματα και παίρνοντας ως $\xi_k=\sqrt{x_{k-1}x_k}$ και ii) βρίσκοντας το άθροισμα Riemann θεωρώντας κατάλληλη διαμέριση.

2.5. α) Έστω $f,g:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ δυο φραγμένες συναρτήσεις με $f(x)\le g(x)$ $\forall x\in[\alpha,\beta]$. Να αποδείξετε ότι: $L_f\le L_g$ και $U_f\le U_g$.

β) Αν $|f(x)|\le M$, $\forall x\in[\alpha,\beta]$ να αποδείξετε ότι:

$$0\le U(P,f)-L(P,f)\le 2M(\beta-\alpha).$$

§ 2.4. ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΥΠΑΡΞΗ ΤΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ ΚΑΤΑ RIEMANN

Θα δώσουμε τώρα συνθήκες κάτω από τις οποίες μια φραγμένη συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann. Και πρώτα θα δώσουμε μια ικανή και αναγκαία συνθήκη, γνωστή ως συνθήκη ολοκληρωσιμότητας του Riemann, σε δυο μορφές:

Θεώρημα 2.5. (Συνθήκη του Riemann-Μορφή Α΄). Μια φραγμένη συνάρτηση $f\colon I=[\alpha,\beta]\to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο I, αν και μόνο αν, για κάθε $\varepsilon>0$, υπάρχει $\delta>0$, τέτοιο ώστε για κάθε διαμέριση P του I με $\|P\|<\delta$, να ισχύει:

$$U(P,f)-L(P,f)<\varepsilon \qquad (*)$$

Απόδειξη

Η συνθήκη είναι αναγκαία

Έστω ότι η φραγμένη συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη. Τότε

$$L_f=U_f=\int_\alpha^\beta f(x)dx$$

Έστω $\varepsilon>0$. Από το θεώρημα 2.1 του Darboux, υπάρχει $\delta>0$, τέτοιο ώστε για κάθε διαμέριση P με $\|P\|<\delta$ να έχουμε:

$$U(P,f)<U_f+\frac{\varepsilon}{2}=\int_\alpha^\beta f(x)dx+\frac{\varepsilon}{2} \qquad (1)$$

και

$$L(P,f)>L_f-\frac{\varepsilon}{2}=\int_\alpha^\beta f(x)dx-\frac{\varepsilon}{2} \qquad (2)$$

Από την (2) έχουμε:

$$-L(P,f)<-\int_\alpha^\beta f(x)dx+\frac{\varepsilon}{2} \qquad (3)$$

Με πρόσθεση των (1) και (3) έχουμε:

$$U(P,f)-L(P,f)<\varepsilon.$$

για κάθε διαμέριση P με $\|P\|<\delta$.

Η συνθήκη είναι ικανή

Ας υποθέσουμε ότι ισχύει η (*). Για τυχαία διαμέριση P, ξέρουμε ότι:

$$L(P,f)\leq L_f\leq U_f\leq U(P,f)$$

ή

$$U_f-L_f\leq U(P,f)-L(P,f)<\varepsilon$$

Αφού το ε είναι αυθαίρετος θετικός αριθμός, από την τελευταία σχέση έχουμε ότι ο μη αρνητικός αριθμός U_f-L_f είναι μικρότερος από κάθε θετικό αριθμό. Άρα πρέπει να είναι μηδέν, οπότε $U_f=L_f$ και συνεπώς η f είναι ολοκληρώσιμη.■

Πόρισμα: Η φραγμένη συνάρτηση $f\colon I\to\mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο I, αν και μόνο αν,

$$\lim\{U(P,f)-L(P,f)\}=0$$

για οποιαδήποτε διαμέριση P του I με $\|P\|\to 0$.

Θεώρημα 2.6. (Συνθήκη του Riemann-Μορφή Β΄). Μια φραγμένη συνάρτηση $f\colon I\to\mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο I, αν και μόνο αν, για κάθε $\varepsilon>0$, υπάρχει διαμέριση P του I, τέτοια ώστε:

$$U(P,f)-L(P,f)<\varepsilon \qquad (**)$$

Απόδειξη

Το αναγκαίο

Έστω ότι η f είναι ολοκληρώσιμη. Τότε $L_f=U_f$. Από την παρατήρηση 2.1 έχουμε ότι υπάρχουν διαμερίσεις P_1 και P_2 τέτοιες ώστε:

$$L_f-\frac{\varepsilon}{2}<L(P_1,f)$$

και

$$U(P_2,f)<U_f+\frac{\varepsilon}{2}$$

Έστω $P=P_1 \cup P_2$. Τότε η P είναι λεπτότερη και από την P_1 και από την P_2. Συνεπώς από τις Προτάσεις 2.2 και 2.1 έχουμε:

$$L_f-\frac{\varepsilon}{2}< L(P_1,f) \leq L(P,f) \leq U(P,f) \leq U(P_2,f) <U_f+\frac{\varepsilon}{2}$$

Αφού $L_f=U_f$ έχουμε ότι η (**) ισχύει.

Το ικανό

Έστω ότι η (**) ισχύει. Αφού για οποιαδήποτε διαμέριση P του I έχουμε:

$$L(P,f) \leq L_f \quad \text{και} \quad U_f \leq U(P,f)$$

ή

$$U_f-L_f \leq U(P,f)-L(P,f) <\varepsilon$$

συμπεραίνουμε ότι $U_f=L_f$ και συνεπώς η f είναι ολοκληρώσιμη.■

Παρατήρηση 2.9.

Συγκρίνοντας τις παραπάνω δυο μορφές της συνθήκης του Riemann, βλέπουμε ότι από την άποψη του αναγκαίου, η πρώτη μορφή είναι ισχυρότερη της δεύτερης, αλλά από την άποψη του ικανού, η δεύτερη μορφή είναι ισχυρότερη της πρώτης.

Παρατήρηση 2.10.

Από το Πόρισμα του Θεωρήματος 2.5 παίρνουμε ακόμα ότι

$$\lim L(P,f)=\int_\alpha^\beta f(x)dx=\lim U(P,f)$$

για οποιαδήποτε διαμέριση P του I με $||P|| \to 0$. Αυτό έχει σαν συνέπεια ότι αν και στον ορισμό του ολοκληρώματος του Riemann θεωρούμε το σύνολο όλων των δυνατών διαμερίσεων ενός διαστήματος, για μια δοσμένη συνάρτηση, η ύπαρξη και η τιμή του ολοκληρώματος μπορεί συχνά να εξασφαλιστεί από μια ειδική ακολουθία διαμερίσεων.

Παράδειγμα 2.5.

Στο παράδειγμα 2.2 είδαμε ότι η $f(x)=x, x\in[0,1]$ είναι ολοκληρώσιμη. Αν $P_\nu=\left\{0,\frac{1}{\nu},\frac{2}{\nu},\dots,\frac{\nu-1}{\nu},1\right\}$ τότε από τους υπολογισμούς του παραδείγματος 2.2 έχουμε ότι:

$$\lim\{U(P_\nu,f)-L(P_\nu,f)\}=\lim\frac{1}{\nu}=0$$

και συνεπώς

$$\int_0^1 xdx=\lim U(P_\nu,f)=\lim\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\nu}\right)=\frac{1}{2}$$

Θεώρημα 2.7. Αν η $f:[\alpha,\beta]\to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha,\beta]$.

Απόδειξη

Αφού η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα, θα είναι και ομοιόμορφα συνεχής, δηλ.

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x,y\in[\alpha,\beta])|x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{\beta-\alpha} \quad (1)$$

Επίσης αφού η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα θα παίρνει μέγιστο και ελάχιστο σε κάθε κλειστό υποδιάστημα του $[\alpha,\beta]$. Έστω P μια διαμέριση του $[\alpha,\beta]$ με $||P||<\delta$. Τότε υπάρχουν $\xi_k', \xi_k''\in[x_{k-1},x_k]$, $k=1,2,\dots,\nu$ τέτοια ώστε:

$$f(\xi_k')=M_k \quad \text{και} \quad f(\xi_k'')=m_k$$

Αφού τα M_k και m_k είναι τιμές της συναρτήσεως, από την (1) επειδή $|\xi_k'-\xi_k''|<\delta$ έχουμε:

$$|f(\xi_k')-f(\xi_k'')|<\frac{\varepsilon}{\beta-\alpha}$$

Συνεπώς:

$$U(P,f)-L(P,f)=\sum_{k=1}^{\nu}M_k(x_k-x_{k-1})-\sum_{k=1}^{\nu}m_k(x_k-x_{k-1})$$

$$= \sum_{k=1}^{\nu} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1})$$

$$= \sum_{k=1}^{\nu} (f(\xi_k') - f(\xi_k''))(x_k - x_{k-1})$$

$$< \frac{\varepsilon}{\beta-\alpha} \sum_{k=1}^{\nu} (x_k - x_{k-1})$$

$$= \frac{\varepsilon}{\beta-\alpha} \ (\beta-\alpha) = \varepsilon$$

οπότε από την συνθήκη του Riemann (Θεώρημα 2.5) η f είναι ολοκληρώσιμη.■

Παρατήρηση 2.11.

Η συνέχεια στο προηγούμενο θεώρημα είναι *ι κ α ν ή σ υ ν θ ή κ η γ ι α ο λ ο κ λ η ρ ω σ ι μ ό τ η τ α, α λ λ ά ό χ ι κ α ι α ν α γ κ α ί α*. Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι ολοκληρώσιμες χωρίς να είναι συνεχείς, όπως δείχνει το επόμενο

Θεώρημα 2.8. Αν η φραγμένη συνάρτηση $f:[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ έχει ένα μόνο σημείο ασυνέχειας στο $[\alpha,\beta]$, τότε αυτή είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha,\beta]$.

Απόδειξη

Έστω c το σημείο ασυνέχειας της f με $c \in [\alpha,\beta]$. Θεωρούμε μια διαμέριση $P=\{x_0, x_1, \ldots, x_\nu\}$ του $[\alpha,\beta]$. Τότε το c θα ανήκει σε ένα ή δυο τμήματα της διαμέρισης. Σε δυο ανήκει αν $c=x_i$ για κάποιο $i \in \{0, 1, \ldots, \nu\}$. Ας υποθέσουμε ότι το c είναι διαφορετικό από όλα τα $x_i, i=0, 1, \ldots, \nu$ και ότι $x_\lambda < c < x_{\lambda+1}$

Η f στο $[\alpha, x_\lambda] \cup [x_{\lambda+1}, \beta]$ είναι συνεχής, άρα

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists\, \delta > 0)(\forall x,y \in [\alpha, x_\lambda] \cup [x_{\lambda+1}, \beta])|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon \quad (1)$$

Επίσης αφού η f είναι φραγμένη το supremum και το infimum της f υπάρχουν σε κάθε τμήμα της διαμέρισης. Ας είναι

$$m \leq f(x) \leq M, \ \forall x \in [\alpha,\beta] \quad \text{και} \quad \hat{M} = \sup\{f(x): x \in [x_\lambda, c]\}$$

$\bar{M} = \sup\{f(x): x \in [c, x_{\lambda+1}]\}$ και $\hat{m}, \bar{m}$ τα infima της f στα αντίστοιχα διαστήματα. Ακόμα ας είναι

$$M_k = \sup\{f(x): x \in [x_{k-1}, x_k], k=1,2,\ldots,\lambda,\lambda+2,\ldots,\nu\}$$

$$m_k = \inf\{f(x): x \in [x_{k-1}, x_k], k=1,2,\ldots,\lambda,\lambda+2,\ldots,\nu\}$$

Παρατηρούμε ότι:

$$M_k - m_k < \varepsilon$$

από την (1) αφού είναι τιμές της συναρτήσεως, σε όλα τα τμήματα της διαμέρισης, εκτός από το $[x_\lambda, x_{\lambda+1}]$, στο οποίο ισχύει:

$$\hat{M} - \hat{m} < M - m \quad \text{και} \quad \bar{M} - \bar{m} < M - m$$

Διαλέγοντας την διαμέριση P, έτσι ώστε $\|P\| < \varepsilon$ θα έχουμε

$$U(P,f) - L(P,f) = \sum_{k=1}^{\lambda} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) + (\hat{M} - \hat{m})(c - x_\lambda) +$$

$$+ (\bar{M} - \bar{m})(x_{\lambda+1} - c) + \sum_{k=\lambda+2}^{\nu} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1})$$

$$< \varepsilon\{(x_1 - x_0) + \cdots + (x_\lambda - x_{\lambda-1}) + (x_{\lambda+2} - x_{\lambda+1}) + \cdots + (x_\nu - x_{\nu-1})\}$$

$$+ (M-m)(x_{\lambda+1} - x_\lambda)$$

$$< \varepsilon\{(x_\lambda - \alpha) + (\beta - x_{\lambda+1})\} + (M-m)\varepsilon$$

$$< \varepsilon(\beta-\alpha) + (M-m)\varepsilon = (\beta - \alpha + M - m)\varepsilon$$

οπότε από την συνθήκη του Riemann η f είναι ολοκληρώσιμη.■

Πόρισμα: Αν η φραγμένη συνάρτηση $f:[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ έχει πεπερασμένα το πλήθος σημεία ασυνέχειας στο $[\alpha,\beta]$, τότε αυτή είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha,\beta]$.

Παράδειγμα 2.6.

Η συνάρτηση $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ με

$$f(x)=\begin{cases} 2x\sin\frac{\pi}{2x}-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2x}, & 0<x\leqslant 1 \\ k, & x=0 \end{cases}$$

είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$.

Πραγματικά παρατηρούμε πρώτα ότι η f είναι φραγμένη αφού:

$$|f(x)| \leqslant 2x+\frac{\pi}{2} \leqslant 2+\frac{\pi}{2} < 4, \ \forall x \in [0,1]$$

Η f όμως δεν είναι συνεχής στο 0, αφού το $\lim\limits_{x\to 0+} \cos\frac{\pi}{2x}$ δεν υπάρχει. Επειδή λοιπόν η f είναι φραγμένη και έχει ένα μόνο σημείο ασυνέχειας, από το Θεώρημα 2.8 είναι ολοκληρώσιμη.

Παράδειγμα 2.7.

Έστω $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ με

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0<x\leqslant 1 \\ 1, & x=0 \end{cases}$$

Τότε η f είναι φραγμένη στο $[0,1]$ και δεν είναι συνεχής στο 0. Άρα από το θεώρημα 2.8 είναι ολοκληρώσιμη.

Η συνάρτηση όμως

$$g(x)=\begin{cases} \frac{1}{x}, & 0<x\leqslant 1 \\ 1, & x=0 \end{cases}$$

δεν είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$, αν και έχει ένα σημείο ασυνέχειας, γιατί δεν είναι φραγμένη.

Θεώρημα 2.9. **Αν $f:[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ είναι μια μονότονη συνάρτηση, τότε αυτή είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha,\beta]$.**

Απόδειξη

Ας υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $f(\alpha)<f(\beta)$, δηλ. η f είναι αύξουσα. Αν $f(\alpha)=f(\beta)$ τότε $f(x)=f(\alpha)$, $\forall x \in [\alpha,\beta]$ και τότε η f είναι ολοκληρώσιμη, από το Παράδειγμα 2.1, με $\int_\alpha^\beta f(x)dx = f(\alpha)(\beta-\alpha)$. Διαλέγουμε ένα $\varepsilon>0$ και μια διαμέριση $P=\{x_0,x_1,\dots,x_\nu\}$ του $[\alpha,\beta]$ με

$$||P|| < \frac{\varepsilon}{f(\beta)-f(\alpha)}$$

Αφού η f είναι αύξουσα, θα έχουμε:

$$M_k=\max_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)=f(x_k)$$

$$m_k=\min_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)=f(x_{k-1})$$

Συνεπώς:

$$U(P,f)-L(P,f)=\sum_{k=1}^{\nu}(f(x_k)-f(x_{k-1}))(x_k-x_{k-1})$$

$$<\frac{\varepsilon}{f(\beta)-f(\alpha)}\{f(x_1)-f(\alpha)+f(x_2)-f(x_1)+\dots+f(\beta)-f(x_{k-1})\}$$

$$=\frac{\varepsilon}{f(\beta)-f(\alpha)}(f(\beta)-f(\alpha))=\varepsilon.$$

Άρα, από την συνθήκη του Riemann, η f είναι ολοκληρώσιμη. ■

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να αποδείξετε ότι: $\int_\alpha^\beta \sin x dx=\cos\alpha-\cos\beta$

Απόδειξη

Επειδή η συνάρτηση $f(x)=\sin x, x \in [\alpha,\beta]$ είναι συνεχής, θα είναι και ολοκληρώσιμη. (Θεώρημα 2.7). Για τον υπολογισμό του διαλέγουμε την εξής ακολουθία διαμερίσεων:

$$P_\nu=\left\{\alpha, \alpha+\frac{\beta-\alpha}{\nu}, \alpha+\frac{2(\beta-\alpha)}{\nu}, \dots, \alpha+\frac{\nu(\beta-\alpha)}{\nu}=\beta\right\}$$

Δηλαδή χωρίζουμε το $[\alpha,\beta]$ σε ν ίσα μέρη, οπότε τα σημεία της διαμέρισης αποτελούν αριθμητική πρόοδο. Τότε είναι $||P_\nu|| = \frac{\beta-\alpha}{\nu} \to 0$. Θέτουμε για ευκολία $\omega=\frac{\beta-\alpha}{\nu}$.

Σχηματίζουμε το άθροισμα του Riemann με ενδιάμεσα σημεία τα αριστερά άκρα των τμημάτων της διαμέρισης P_ν:

$$S(P_\nu,f,\Xi)=\sum_{k=1}^{\nu}\sin(\alpha+(k-1)\omega)\cdot\omega$$

$$=\omega\sum_{k=1}^{\nu}\sin(\alpha+(k-1)\omega)$$

$$=\omega\cdot\frac{\cos\left(\alpha-\frac{\omega}{2}\right)-\cos\left(\beta-\frac{\omega}{2}\right)^{*}}{2\sin\frac{\omega}{2}}$$

Επειδή $\lim\limits_{\omega\to 0}\frac{\omega}{2\sin\frac{\omega}{2}}=1$ έχουμε:

$$\int_\alpha^\beta \sin x\,dx=\lim S(P_\nu,f,\Xi)=\cos\alpha-\cos\beta$$

2. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_\alpha^\beta x^m dx,\ \beta>\alpha>0$

Λύση

Η συνάρτηση $f(x)=x^m, x\in[\alpha,\beta]$ είναι συνεχής και φραγμένη και άρα είναι ολοκληρώσιμη. Θα διακρίνουμε δυο περιπτώσεις:

α) $m\neq-1$. Διαλέγουμε την παρακάτω ακολουθία διαμερίσεων:

$$P_\nu=\{\alpha,\alpha\omega,\alpha\omega^2,\dots,\alpha\omega^\nu=\beta\}\quad\text{με}\quad \omega=\sqrt[\nu]{\frac{\beta}{\alpha}}>1$$

* Χρησιμοποιήθηκε ο τύπος:

$$2\sin\frac{x}{2}(\sin x+\sin 2x+\dots+\sin\nu x)=\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{2\nu+1}{2}x$$

δηλ. τα σημεία της διαμέρισης αποτελούν γεωμετρική πρόοδο. Τότε είναι $||P_\nu||=\beta-\alpha\omega^{\nu-1}=\beta-\frac{\beta}{\omega}\to 0$

Σχηματίζουμε το άθροισμα του Riemann με ενδιάμεσα σημεία τα αριστερά άκρα των τμημάτων της διαμέρισης P_ν:

$$S(P_\nu,f,\Xi)=(\alpha\omega-\alpha)\alpha^m+(\alpha\omega^2-\alpha\omega)\alpha^m\omega^m+\dots+(\alpha\omega^\nu-\alpha\omega^{\nu-1})\alpha^m\cdot\omega^{(\nu-1)m}$$

$$=\alpha^{m+1}(\omega-1)+\alpha^{m+1}\cdot\omega^{m+1}(\omega-1)+\dots+\alpha^{m+1}\cdot\omega^{(\nu-1)(m+1)}(\omega-1)$$

$$=\alpha^{m+1}(\omega-1)\{1+\omega^{m+1}+\dots+(\omega^{m+1})^{\nu-1}\}$$

$$=\alpha^{m+1}(\omega-1)\frac{(\omega^{m+1})^\nu-1}{\omega^{m+1}-1}=\frac{\omega-1}{\omega^{m+1}-1}\cdot(\beta^{m+1}-\alpha^{m+1})$$

Επειδή $\lim\limits_{\omega\to 1}\frac{\omega-1}{\omega^{m+1}-1}=\frac{1}{m+1}$ έχουμε:

$$\int_\alpha^\beta x^m dx=\lim S(P_\nu,f,\Xi)=\frac{\beta^{m+1}-\alpha^{m+1}}{m+1}$$

β) $m=-1$. Τότε $m+1=0$ και συνεπώς $S(P_\nu,f,\Xi)=\nu(\omega-1)$.

Επειδή $\alpha\omega^\nu=\beta \Rightarrow \nu=\frac{\log\beta-\log\alpha}{\log\omega}$ και επομένως:

$$\int_\alpha^\beta x^{-1}dx=\lim S(P_\nu,f,\Xi)=\lim_{\omega\to 1}\frac{\omega-1}{\log\omega}(\log\beta-\log\alpha)=\log\beta-\log\alpha$$

3. α) Αν η $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής τότε να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{\nu\to+\infty}\frac{\beta-\alpha}{\nu}\sum_{k=1}^{\nu}f\left(\alpha+k\frac{\beta-\alpha}{\nu}\right)=\int_\alpha^\beta f(x)dx$$

β) Να εκφράσετε το $\lim\limits_{\nu\to+\infty}\frac{1}{\nu}\sum_{k=1}^{\nu}f\left(\frac{k}{\nu}\right)$ σαν ολοκλήρωμα.

γ) Να υπολογίσετε το όριο της ακολουθίας $\alpha_\nu, \nu\in\mathbb{N}$ με

$$\alpha_\nu=\frac{1}{\nu+1}+\frac{1}{\nu+2}+\dots+\frac{1}{\nu+\nu}$$

Απόδειξη

α) Θεωρούμε την εξής ακολουθία διαμερίσεων:

$$P_\nu=\left\{\alpha,\alpha+\frac{\beta-\alpha}{\nu},\dots,\alpha+\nu\frac{\beta-\alpha}{\nu}=\beta\right\}$$

Τότε $\|P_\nu\|=\frac{\beta-\alpha}{\nu}\to 0$. Σχηματίζουμε το άθροισμα του Riemann με ενδιάμεσα σημεία τα δεξιά άκρα των τμημάτων της P_ν:

$$S(P_\nu,f,\Xi)=\sum_{k=1}^{\nu} f\left(\alpha+k\frac{\beta-\alpha}{\nu}\right)\|P_\nu\|$$

Συνεπώς (Παρατήρηση 2.6) θα έχουμε:

$$\lim_{\nu\to+\infty} S(P_\nu,f,\Xi)=\lim_{\nu\to+\infty}\frac{\beta-\alpha}{\nu}\sum_{k=1}^{\nu} f\left(\alpha+k\frac{\beta-\alpha}{\nu}\right)=\int_\alpha^\beta f(x)dx$$

β) Σύμφωνα με το α) για $\alpha=0$, $\beta=1$ θα έχουμε:

$$\lim_{\nu\to+\infty}\frac{1}{\nu}\sum_{k=1}^{\nu} f\left(k\cdot\frac{1}{\nu}\right)=\int_0^1 f(x)dx$$

γ) Η $\alpha_\nu,\nu\in\mathbb{N}$ γράφεται:

$$\alpha_\nu=\frac{1}{\nu}\left\{\frac{1}{1+\frac{1}{\nu}}+\dots+\frac{1}{1+\frac{\nu}{\nu}}\right\}$$

Έτσι φαίνεται πως η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{1+x}$, $x=\frac{1}{\nu},\dots,\frac{\nu}{\nu}$ δίνει τους όρους της αγκύλης. Όταν το $\nu\to+\infty$ η πρώτη και η τελευταία από αυτές τις τιμές του x τείνουν στα 0 και 1 αντίστοιχα. Παίρνοντας τότε το διάστημα $[0,1]$, η f είναι ολοκληρώσιμη, αφού είναι συνεχής. Θεωρώντας την ακολουθία διαμερίσεων $P_\nu=\left\{0,\frac{1}{\nu},\frac{2}{\nu},\dots,\frac{\nu}{\nu}=1\right\}$, από το α) θα έχουμε:

$$\lim\alpha_\nu=\lim\frac{1}{\nu}\left\{\frac{1}{1+\frac{1}{\nu}}+\dots+\frac{1}{1+\frac{\nu}{\nu}}\right\}=\int_0^1\frac{dx}{1+x}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

2.6. Να αποδείξετε, με την βοήθεια της συνθήκης του Riemann, ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι ολοκληρώσιμες στο $[0,1]$:

α) $f(x)=x$ β) $f(x)=x^2$ γ) $f(x)=e^x$

2.7. Με την βοήθεια του ορισμού, να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $\int_\alpha^\beta \cos x\,dx$ β) $\int_\alpha^\beta e^x dx$ γ) $\int_\alpha^\beta \log x\,dx,\ \beta>\alpha>0$

2.8. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι ολοκληρώσιμες:

α) $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & 0<x\le 1\\ k, & x=0\end{cases}$

β) $f(x)=\begin{cases}e^{\sin(1/x)}, & 0<x\le 1\\ 0, & x=0\end{cases}$

γ) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x}, & 0\le x\le 1\\ (7x-6)^{-1/3}, & 1<x\le 2\end{cases}$

δ) $f(x)=\begin{cases}e^{1/x}, & 0<x\le 1\\ 0, & x=0\end{cases}$

2.9. Για ποιές τιμές του k οι παρακάτω συναρτήσεις είναι ολοκληρώσιμες:

α) $f(x)=\begin{cases}\frac{d}{dx}\left(x^k\sin\frac{\pi}{x}\right), & 0<x\le 1\\ 0, & x=0\end{cases}$

β) $f(x)=x^{-k},\ x\in[0,1]$.

2.10. Να εκφράσετε τα παρακάτω όρια υπό μορφή ολοκληρώματος:

α) $\lim\limits_{\nu\to+\infty}\left\{\frac{\nu}{\nu^2+1^2}+\frac{\nu}{\nu^2+2^2}+\cdots+\frac{\nu}{\nu^2+\nu^2}\right\}$

β) $\lim\limits_{\nu\to+\infty}\left\{\frac{1^p+2^p+\cdots+\nu^p}{\nu^{p+1}}\right\}$, $p>-1$

γ) $\lim\limits_{\nu\to+\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{\nu^2+1^2}}+\frac{1}{\sqrt{\nu^2+2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{\nu^2+\nu^2}}\right\}$

δ) $\lim\limits_{\nu\to+\infty}\frac{3}{\nu}\left\{1+\sqrt{\frac{\nu}{\nu+3}}+\sqrt{\frac{\nu}{\nu+6}}+\cdots+\sqrt{\frac{\nu}{\nu+3(\nu-1)}}\right\}$

ε) $\lim\limits_{\nu\to+\infty}\left\{\frac{1^2}{\nu^3+1^3}+\frac{2^2}{\nu^3+2^3}+\cdots+\frac{\nu^2}{\nu^3+\nu^3}\right\}$

§ 2.5. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ ΤΟΥ RIEMANN

Θα δούμε τώρα μερικές πολύ βασικές ιδιότητες του ολοκληρώματος του Riemann. Τα επόμενα δυο θεωρήματα δείχνουν τον γραμμικό χαρακτήρα του ολοκληρώματος του Riemann, ως προς την ολοκληρωτέα συνάρτηση.

Θεώρημα 2.10. Αν η $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $I=[\alpha,\beta]$ και k είναι τυχαία σταθερή, τότε η συνάρτηση kf είναι ολοκληρώσιμη και μάλιστα ισχύει:

$$\int_\alpha^\beta kf(x)dx=k\int_\alpha^\beta f(x)dx$$

Απόδειξη

Για $k=0$ το συμπέρασμα είναι προφανές. Έστω $k\neq 0$ και $P=\{x_0,x_1,\ldots,x_\nu\}$ μια διαμέριση του I. Αφού η f είναι ολοκληρώσιμη στο I, από τον ορισμό 2.4 θα έχουμε ότι για κάθε $\varepsilon>0$, υπάρχει $\delta>0$, τέτοιο ώστε για κάθε διαμέριση P του I με $\|P\|<\delta$ και κάθε επιλογή ενδιάμεσων σημείων Ξ

της P ισχύει:

$$|S(P,f,\Xi)-A|<\varepsilon/|k|.$$

Αλλά

$$|S(P,kf,\Xi)-kA|=|kS(P,f,\Xi)-kA|$$
$$=|k|\,|S(P,f,\Xi)-A|<\varepsilon$$

που σημαίνει ότι η kf είναι ολοκληρώσιμη στο I και μάλιστα

$$\int_\alpha^\beta kf(x)dx=k\int_\alpha^\beta f(x)dx. \blacksquare$$

Θεώρημα 2.11. Αν οι f_1 και f_2 είναι ολοκληρώσιμες στο $I=[\alpha,\beta]$, τότε και η συνάρτηση f_1+f_2 είναι ολοκληρώσιμη, και μάλιστα ισχύει:

$$\int_\alpha^\beta (f_1(x)+f_2(x))dx=\int_\alpha^\beta f_1(x)dx+\int_\alpha^\beta f_2(x)dx$$

Απόδειξη

Έστω $P=\{x_0,x_1,\ldots,x_\nu\}$ μια διαμέριση του $[\alpha,\beta]$ και Ξ μια οποια-δήποτε επιλογή ενδιάμεσων σημείων της P. Τότε το τυχαίο άθροισμα του Riemann για την f_1+f_2 που αντιστοιχεί στην P και την Ξ μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$S(P,f_1+f_2,\Xi)=\sum_{k=1}^{\nu}[f_1(\xi_k)+f_2(\xi_k)](x_k-x_{k-1})$$

$$=\sum_{k=1}^{\nu}f_1(\xi_k)(x_k-x_{k-1})+\sum_{k=1}^{\nu}f_2(\xi_k)(x_k-x_{k-1})$$

$$=S(P,f_1,\Xi)+S(P,f_2,\Xi) \quad (1$$

Αφού οι f_1 και f_2 είναι ολοκληρώσιμες κατά Riemann, από τον Ορισμό 2.4 έχουμε ότι για κάθε $\varepsilon>0$, υπάρχουν δ_1 και δ_2 τέτοια ώστε:

$$|S(P,f_1,\Xi)-\int_\alpha^\beta f_1(x)dx|<\frac{\varepsilon}{2} \text{ αν } ||P||<\delta_1 \qquad (2)$$

και

$$|S(P,f_2,\Xi)-\int_\alpha^\beta f_2(x)dx|<\frac{\varepsilon}{2} \text{ αν } ||P||<\delta_2 \qquad (3)$$

Διαλέγουμε ως $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$. Τότε από τις (1), (2) και (3) με την βοήθεια και της τριγωνικής ανισότητας, παίρνουμε:

$$|S(P,f_1+f_2,\Xi)-\int_\alpha^\beta f_1(x)dx-\int_\alpha^\beta f_2(x)dx|$$

$$<|S(P,f_1,\Xi)-\int_\alpha^\beta f_1(x)dx|+|S(P,f_2,\Xi)-\int_\alpha^\beta f_2(x)dx|<\varepsilon$$

Αυτό σύμφωνα με τον Ορισμό 2.4 αποδεικνύει το θεώρημα.■

Παρατήρηση 2.12.

Αν δούμε το ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ σαν τελεστή που ενεργεί πάνω στις ολοκληρώσιμες συναρτήσεις, τότε από τα προηγούμενα θεωρήματα προκύπτει ότι αυτός είναι γ ρ α μ μ ι κ ό ς τ ε λ ε σ τ ή ς. (Θεώρημα 2.10 για την ομογένεια και 2.11 για την γραμμικότητα). Έτσι αν f_1 και f_2 είναι ολοκληρώσιμες στο I και k_1, k_2 είναι τυχαίες σταθερές, τότε:

$$\int_\alpha^\beta\{k_1f_1(x)+k_2f_2(x)\}dx=k_1\int_\alpha^\beta f_1(x)dx+k_2\int_\alpha^\beta f_2(x)dx$$

Θεώρημα 2.12. Αν η $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha,\beta]$ και $\alpha\leq\alpha_1<\beta_1\leq\beta$, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha_1,\beta_1]$.

Απόδειξη

Έστω $\varepsilon>0$. Αφού η f είναι ολοκληρώσιμη από την συνθήκη του Riemann έχουμε ότι υπάρχει διαμέριση $P=\{x_0,x_1,\dots,x_\nu\}$ του $[\alpha,\beta]$ τέτοια ώστε:

$$U(P,f)-L(P,f)=\sum_{k=1}^{\nu}(M_k-m_k)(x_k-x_{k-1})<\varepsilon. \qquad (1)$$

Υποθέτουμε ότι τα α_1 και β_1 είναι σημεία της διαμέρισης P, επειδή αν δεν είναι μπορούμε να αλλάξουμε την διαμέριση P και να πάρουμε μια λεπτότερή της P^*, τέτοια ώστε:

$$U(P^*,f)-L(P^*,f)\leq U(P,f)-L(P,f)$$

(Πρόταση 2.2). Έστω λοιπόν $\alpha_1=x_r$ και $\beta_1=x_s$. Αφού κάθε όρος στην (1) είναι μη αρνητικός, θα έχουμε:

$$\sum_{k=r+1}^{s}(M_k-m_k)(x_k-x_{k-1})<\varepsilon$$

Έτσι η $\hat{P}=\{x_r,x_{r+1},\dots,x_s\}$ είναι μια διαμέριση του $[\alpha_1,\beta_1]$ για την οποία ισχύει:

$$U(\hat{P},f)-L(\hat{P},f)=\sum_{k=r+1}^{s}(M_k-m_k)(x_k-x_{k-1})<\varepsilon$$

Συνεπώς, από την συνθήκη του Riemann, η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha_1,\beta_1]$.■

Η επόμενη πολύ χρήσιμη ιδιότητα συσχετίζει την ολοκληρωσιμότητα μιας συνάρτησης f ως προς το διάστημα στο οποίο ορίζεται η συνάρτηση και δείχνει κάποια προσθετικότητα ως προς τα διαστήματα.

Θεώρημα 2.13. Έστω $f: I=[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ μια φραγμένη συνάρτηση και έστω c με $\alpha<c<\beta$. Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο I, αν και μόνο αν, είναι ολοκληρώσιμη και στο $I_1=[\alpha,c]$ και στο $I_2=[c,\beta]$. Σ'αυτή την περίπτωση ισχύει

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_\alpha^c f(x)dx+\int_c^\beta f(x)dx \qquad (*)$$

Απόδειξη

Έστω $P=\{x_0,x_1,\dots,x_\nu\}$ μια διαμέριση του $I=[\alpha,\beta]$ τέτοια ώστε το c να συμπίπτει με κάποιο από τα σημεία της P, έστω $x_m=c$. Τότε η P χωρίζεται σε δυο διαμερίσεις:

$$P_1=\{x_0,x_1,\dots,x_m\} \quad \text{και} \quad P_2=\{x_m,x_{m+1},\dots,x_\nu\}$$

Για οποιαδήποτε επιλογή ενδιάμεσων σημείων Ξ της P θα έχουμε το άθροισμα του Riemann

$$S(P,f,\Xi)=\sum_{k=1}^{\nu} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})$$

$$=\sum_{k=1}^{m} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})+\sum_{k=m+1}^{\nu} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1}) \qquad (1)$$

Ας υποθέσουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο I. Τότε από το θεώρημα 2.12 η f είναι ολοκληρώσιμη και στο I_1 και στο I_2. Αν $||P||<\delta$, τότε προφανώς $||P_1||<\delta$ και $||P_2||<\delta$ και άρα από τον Ορισμό 2.4 έχουμε ότι:

$$\left|S(P,f,\Xi)-\int_\alpha^\beta f(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{3},\ \left|S(P_1,f,\Xi)-\int_\alpha^c f(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{3},$$
$$\left|S(P_2,f,\Xi)-\int_c^\beta f(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Από τις ανισότητες αυτές με την βοήθεια της (1) έχουμε:

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)dx-\int_\alpha^c f(x)dx-\int_c^\beta f(x)dx\right| <\varepsilon$$

Αφού το ε είναι αυθαίρετο, παίρνουμε την (*).

Το αντίστροφο, υποθέτοντας ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στα I_1 και I_2 προκύπτει εύκολα από την (1). Αφήνουμε τις λεπτομέρειες για άσκηση.■

Πόρισμα: Αν η $f:I \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη και $P=\{x_0,x_1,\dots,x_\nu\}$ είναι μια διαμέριση του P, τότε:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx=\sum_{k=1}^{\nu}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx$$

Θεώρημα 2.14. Έστω $f: I=[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ μια ολοκληρώσιμ συνάρτηση. Αν $f(x) \geqslant 0,\ \forall x \in[\alpha,\beta]$ τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx \geqslant 0$. Επ πλέον, αν υπάρχει ένα σημείο $c \in[\alpha,\beta]$ στο οποίο η f είνα συνεχής με $f(c)>0$, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx >0$.

Απόδειξη

Έστω $P=\{x_0,x_1,\dots,x_\nu\}$ μια διαμέριση του I. Τότε

$$m_k=\inf\{f(x):x \in[x_{k-1},x_k]\} \geqslant 0,\ k=1,2,\dots,\nu$$

και άρα $L(P,f) \geqslant 0$. Συνεπώς

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx=\sup\{L(P,f):P \in \mathcal{P}(I)\} \geqslant 0$$

Ας είναι τώρα c με $\alpha<c<\beta$ το σημείο στο οποίο η f είναι σ νεχής. Αν $c=\alpha$ ή $c=\beta$ η απόδειξη είναι ανάλογη. Αφού η f είναι σ νεχής στο c, συνεπάγεται ότι υπάρχει $\delta>0$, τέτοιο ώστε

$$\alpha<c-\delta<c<c+\delta<\beta \quad \text{και} \quad |f(x)-f(c)| \leqslant \frac{1}{2}f(c)$$

για όλα τα $x \in[c-\delta,c+\delta]$

Ειδικά $f(x) \geqslant f(c)-\frac{1}{2}f(c)=\frac{1}{2}f(c)>0$, για $c-\delta \leqslant x \leqslant c+\delta$. Επίσ για $x \in[\alpha,c-\delta] \cup[c+\delta,\beta]$ είναι $f(x) \geqslant 0$. Συνεπώς από το θεώρημα 2.13 χουμε:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_\alpha^{c-\delta} f(x)dx+\int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)dx+\int_{c+\delta}^{\beta} f(x)dx$$

$$\geqslant 0+\int_{c-\delta}^{c+\delta}\frac{1}{2}f(c)dx+0$$

$$=\frac{1}{2}f(c)(c+\delta-(c-\delta))$$

$$=\delta f(c)>0 \ ■$$

Πόρισμα: Αν $f,g:I \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμες στο $I=[\alpha,\beta]$ και $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in I$, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx \leq \int_\alpha^\beta g(x)dx$. Επί πλέον αν υπάρχει ένα σημείο $c \in [\alpha,\beta]$ στο οποίο οι f και g είναι συνεχείς με $f(c) < g(c)$ τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx < \int_\alpha^\beta g(x)dx$

Απόδειξη

Προκύπτει εύκολα με εφαρμογή του Θεωρήματος, 2.14 στην συνάρτηση $h(x)=g(x)-f(x)$. ■

Θεώρημα 2.15. Αν η $f: I=[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο I, τότε και η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη στο I και μάλιστα ισχύει:

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)dx\right| \leq \int_\alpha^\beta |f(x)|dx$$

Πριν αποδείξουμε το θεώρημα, ας αποδείξουμε το παρακάτω

Λήμμα: Αν m,M είναι το infimum και το supremum της f στο $[\alpha,\beta]$, τότε:

$$M-m=\sup\{|f(x_1)-f(x_2)|:x_1,x_2 \in[\alpha,\beta]\}$$

Απόδειξη

Έχουμε: $m \leq f(x_1)$ και $f(x_2) \leq M$, $\forall x_1,x_2 \in[\alpha,\beta]$. Δηλαδή

$$|f(x_1)-f(x_2)| \leq M-m, \ \forall x_1,x_2 \in[\alpha,\beta] \qquad (1)$$

Συνεπώς το $M-m$ είναι άνω φράγμα για το σύνολο

$$A=\{|f(x_1)-f(x_2)|:x_1,x_2 \in[\alpha,\beta]\}.$$

Έστω τώρα $\varepsilon>0$ δοσμένος θετικός αριθμός. Σύμφωνα με τον Ορισμό του infimum και του supremum της f, υπάρχουν x' και $x'' \in[\alpha,\beta]$ τέτοια ώστε:

$$f(x') < m+\frac{\varepsilon}{2} \quad \text{και} \quad f(x'') > M-\frac{\varepsilon}{2}$$

Τότε έχουμε:

$$|f(x')-f(x'')| > M-m-\varepsilon \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) έχουμε ότι $M-m=\sup A$.

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.15.

Έστω $\varepsilon>0$. Αφού η f είναι ολοκληρώσιμη στο I, υπάρχει διαμέριση P του I τέτοια ώστε:

$$U(P,f)-L(P,f) < \varepsilon \qquad (3)$$

Ας είναι $m_k'=\inf\{|f(x)|:x \in[x_{k-1},x_k]\}$ και $M_k'=\sup\{|f(x)|,x \in[x_{k-1}, x_k]\}$. Τότε για οποιαδήποτε $x_1,x_2 \in[x_{k-1},x_k]$ έχουμε:

$$\big||f|(x_2)-|f|(x_1)\big|=\big||f(x_2)|-|f(x_1)|\big| \leq |f(x_2)-f(x_1)| \leq M_k-m_k$$

Σύμφωνα με το Λήμμα θα έχουμε:

$$M_k'-m_k' \leq M_k-m_k \qquad (4)$$

Από την (4) με την βοήθεια της (3) έχουμε:

$$U(P,|f|)-L(P,|f|) \leq U(P,f)-L(P,f) < \varepsilon$$

Άρα η $|f|$ ικανοποιεί την συνθήκη του Riemann και συνεπώς είναι ολοκληρώσιμη.

Επειδή $f \leq |f|$ και $-f \leq |f|$ από το Πόρισμα του Θεωρήματος 2.14 έχουμε:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx \leq \int_\alpha^\beta |f(x)|dx$$

και

$$-\int_\alpha^\beta f(x)dx \leq \int_\alpha^\beta |f(x)|dx$$

Συνεπώς $\left|\int_\alpha^\beta f(x)dx\right| \leq \int_\alpha^\beta |f(x)|dx$. ■

Πόρισμα: Αν $||f|| = \sup_{a \in \varepsilon \beta} |f(x)|$ μιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης f στο $[\alpha,\beta]$, τότε:

$$|\int_\alpha^\beta f(x)dx| \leq ||f|| (\beta-\alpha)$$

(Δηλαδή το ολοκλήρωμα είναι ένας φραγμένος τελεστής από τις συναρτήσεις στους πραγματικούς αριθμούς).

Παρατήρηση 2.13.

Από το Πόρισμα του Θεωρήματος 2.14 έχουμε ότι μια ανισότητα μεταξύ ολοκληρώσιμων συναρτήσεων μπορεί να ολοκληρωθεί, πράγμα που δεν ισχύει για την παραγώγιση.

Παρατήρηση 2.14.

Το αντίστροφο του Θεωρήματος 2.15 δεν ισχύει. Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα την συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x)=\begin{cases} 1, & x \text{ ρητός} \\ -1, & x \text{ άρρητος} \end{cases}$$

Τότε $U_f=\beta-\alpha$ και $L_f=-(\beta-\alpha)$ και άρα η f δεν είναι ολοκληρώσιμη στο τυχαίο διάστημα $[\alpha,\beta]$.

Όμως $|f(x)|=1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ και $\int_\alpha^\beta |f(x)|dx=\beta-\alpha$

Έτσι η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη, ενώ η f όχι.

Θεώρημα 2.16. Αν η $f: I=[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο I, τότε και η f^2 είναι ολοκληρώσιμη στο I.

Απόδειξη

Αφού η f είναι φραγμένη στο I και η $|f|$ θα είναι φραγμένη στο I, δηλ. υπάρχει M τέτοιο ώστε $|f(x)| \leq M$, $\forall x \in I$.

Επίσης, αφού η f είναι ολοκληρώσιμη, από το θεώρημα 2.15 έχουμε ότι και η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη. Συνεπώς, $\forall \varepsilon > 0$, υπάρχει διαμέριση P του I τέτοια ώστε:

$$U(P,|f|)-L(P,|f|) < \frac{\varepsilon}{2M}$$

Ας είναι m_k, M_k τα infima και τα suprema της $|f|$ στα $[x_{k-1},x_k]$ και m_k', M_k' τα αντίστοιχα της f^2 στα $[x_{k-1},x_k]$. Τότε $M_k'=M_k^2$ και $m_k'=m_k^2$. Επίσης

$$U(P,f^2)-L(P,f^2)=\sum_{k=1}^{\nu}(M_k'-m_k')(x_k-x_{k-1})$$

$$=\sum_{k=1}^{\nu}(M_k^2-m_k^2)(x_k-x_{k-1})$$

$$=\sum_{k=1}^{\nu}(M_k+m_k)(M_k-m_k)(x_k-x_{k-1})$$

$$< 2M\left\{\sum_{k=1}^{\nu}(M_k-m_k)(x_k-x_{k-1})\right\}$$

$$=2M\{U(P,|f|)-L(P,|f|)\}$$

$$< 2M\frac{\varepsilon}{2M}=\varepsilon.$$

Συνεπώς η f^2 είναι ολοκληρώσιμη στο I. ∎

Παρατήρηση 2.15.

Στην απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος θεωρήσαμε την $|f|$ για να μην διακρίνουμε περιπτώσεις αν η f είναι θετική ή αρνητική στο I.

Πόρισμα: Αν οι $f,g: I \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμες στο I, τότε και το γινόμενό τους $f \cdot g$ είναι ολοκληρώσιμη στο I.

Απόδειξη

Αφού f και g είναι ολοκληρώσιμες στο I από τα θεωρήματα 2.11 και 2.16 έχουμε ότι οι $f+g$ και f^2, g^2 είναι ολοκληρώσιμες στο I. Συνεπώς και η

$$\frac{1}{2}[(f+g)^2-f^2-g^2]=f\cdot g$$

είναι ολοκληρώσιμη στο I. ■

Παρατήρηση 2.16.

Θα λέμε ότι ένα σύνολο D αποτελεί μια *άλγεβρα υπεράνω του σώματος των πραγματικών αριθμών*, αν είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση, τον πολλαπλασιασμό και τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό με πραγματικούς αριθμούς.

Για παράδειγμα οι πραγματικές συναρτήσεις με κοινό πεδίο ορισμού αποτελούν μια άλγεβρα που την συμβολίζουμε με F[D]. Μια άλγεβρα πάντα έχει μηδενικό στοιχείο, αλλά δεν χρειάζεται να έχει μοναδιαίο στοιχείο. Από τα θεωρήματα 2.10, 2.11 και το Πόρισμα του Θεωρήματος 2.16 έχουμε ότι:

Το σύνολο των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στο διάστημα [α,β], αποτελεί μια άλγεβρα.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Αν η συνάρτηση f είναι θετική[1] και ολοκληρώσιμη στο διάστημα [α,β], τότε και οι συναρτήσεις $g=\frac{1}{f}$ και $h=\sqrt{f}$ είναι ολοκληρώσιμες στο [α,β].

Απόδειξη

Έστω $0<m<f(x)\leq M$, $\forall x\in[\alpha,\beta]$. Αφού η f είναι ολοκληρώσιμη στο [α,β], θα ισχύει η συνθήκη του Riemann, δηλ.

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists \text{ διαμέριση } P \text{ του } [\alpha,\beta]):\ U(P,f)-L(P,f)<\varepsilon \qquad (1)$$

Αν είναι m_k,M_k τα infima και τα suprema της f στα $[x_{k-1},x_k]$ και m_k', M_k', m_k'', M_k'' τα αντίστοιχα των g και h θα έχουμε:

$$U(P,g)-L(P,g)=\sum_{k=1}^{\nu}(M_k'-m_k')(x_k-x_{k-1})$$

1) με $m=\inf f(x)>0$, $\forall x\in[\alpha,\beta]$

$$=\sum_{k=1}^{\nu}\left(\frac{1}{m_k}-\frac{1}{M_k}\right)(x_k-x_{k-1})$$

$$=\sum_{k=1}^{\nu}\frac{M_k-m_k}{m_kM_k}(x_k-x_{k-1})$$

$$<\frac{1}{m^2}\sum_{k=1}^{\nu}(M_k-m_k)(x_k-x_{k-1})$$

$$=\frac{1}{m^2}(U(P,f)-L(P,f))<\frac{\varepsilon}{m^2}$$

Αυτό σημαίνει ότι η $g=\frac{1}{f}$ είναι ολοκληρώσιμη στο [α,β].

Για τη h όμοια έχουμε:

$$U(P,h)-L(P,h)=\sum_{k=1}^{\nu}(M_k''-m_k'')(x_k-x_{k-1})$$

$$=\sum_{k=1}^{\nu}(\sqrt{M_k}-\sqrt{m_k})(x_k-x_{k-1})$$

$$=\sum_{k=1}^{\nu}\frac{M_k-m_k}{\sqrt{M_k}+\sqrt{m_k}}(x_k-x_{k-1})$$

$$<\frac{1}{2\sqrt{m}}\sum_{k=1}^{\nu}(M_k-m_k)(x_k-x_{k-1})$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{m}}(U(P,f)-L(P,f))<\frac{\varepsilon}{2\sqrt{m}}$$

Άρα και η h είναι ολοκληρώσιμη στο [α,β].

2. (Ανισότητα των Cauchy-Schwarz) Έστω f και g δυο ολοκληρώσιμες συναρτήσεις στο διάστημα [α,β]. Να αποδείξετε ότι:

$$\left\{\int_\alpha^\beta f(x)g(x)dx\right\}^2\leq\left\{\int_\alpha^\beta f^2(x)dx\right\}\left\{\int_\alpha^\beta g^2(x)dx\right\}$$

Απόδειξη

Αφού οι f και g είναι ολοκληρώσιμες στο $[\alpha,\beta]$, τότε και οι $f\cdot g$, f^2 και g^2 είναι επίσης ολοκληρώσιμες στο $[\alpha,\beta]$. Αν $f\equiv 0$ ή $g\equiv 0$ προφανώς η ανισότητα ισχύει. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $f,g\not\equiv 0$ στο $[\alpha,\beta]$

Θεωρούμε το ολοκλήρωμα:

$$I=\int_\alpha^\beta \{kf(x)+g(x)\}^2dx \geq 0$$

ή

$$I=k^2\int_\alpha^\beta f^2(x)dx+2k\int_\alpha^\beta f(x)g(x)dx+\int_\alpha^\beta g^2(x)dx \geq 0 \tag{1}$$

Αν θέσουμε $I_1=\int_\alpha^\beta f^2(x)dx$, $I_2=\int_\alpha^\beta f(x)g(x)dx$ και $I_3=\int_\alpha^\beta g^2(x)dx$ η (1) γίνεται:

$$k^2I_1+2kI_2+I_3 \geq 0$$

Αυτή, αν την θεωρήσουμε τριώνυμο ως προς k, για να αληθεύει $\forall k \in \mathbb{R}$, αφού $I_1>0$, πρέπει:

$$I_2^2-I_1I_3 \leq 0$$

ή

$$\left(\int_\alpha^\beta f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \int_\alpha^\beta f^2(x)dx\int_\alpha^\beta g^2(x)dx$$

ή ακόμα

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)g(x)dx\right| \leq \{\int_\alpha^\beta f^2(x)dx\}^{1/2}\{\int_\alpha^\beta g^2(x)dx\}^{1/2}$$

Σημείωση

Μπορούμε να αποδείξουμε πιο γενικά ότι η ισότητα ισχύει, αν οι f και g είναι γραμμικά εξαρτημένες, ενώ η ανισότητα, αν οι f και g είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Το αφήνουμε για άσκηση.

3. α) Αν η $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha,\beta]$ και $m \leq f(x) \leq M$, $\forall x \in[\alpha,\beta]$, τότε να αποδείξετε ότι:

$$m(\beta-\alpha) \leq \int_\alpha^\beta f(x)dx \leq M(\beta-\alpha)$$

β) Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{2}{\sqrt[4]{e}} \leq \int_0^2 e^{x^2-x}dx \leq 2e^2$$

Απόδειξη

α) Από το Παράδειγμα 2.1 έχουμε ότι:

$$\int_\alpha^\beta mdx=m(\beta-\alpha),\quad \int_\alpha^\beta Mdx=M(\beta-\alpha)$$

Εξάλλου από το Πόρισμα του Θεωρήματος 2.14, αφού $m \leq f(x) \leq M$, $\forall x \in [\alpha,\beta]$, έχουμε:

$$\int_\alpha^\beta mdx \leq \int_\alpha^\beta f(x)dx \leq \int_\alpha^\beta Mdx$$

ή

$$m(\beta-\alpha) \leq \int_\alpha^\beta f(x)dx \leq M(\beta-\alpha).$$

β) Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x)=e^{x^2-x}$, $x \in[0,2]$. Θα βρούμε την μικρότερη και την μεγαλύτερη τιμή της f στο $[0,2]$. Είναι $f'(x)=e^{x^2-x}\cdot(2x-1)$ και $f'(x)=0$ για $x=\frac{1}{2}$. Επειδή $f''\left(\frac{1}{2}\right)>0$ η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x=\frac{1}{2}$ το $f\left(\frac{1}{2}\right)=e^{-(1/4)}$. Επίσης είναι $f(0)=1$ και $f(2)=e^2$. Συνεπώς

$$m=e^{-(1/4)} \quad \text{και} \quad M=e^2$$

Σύμφωνα τότε με το α) θα έχουμε:

$$2e^{-(1/4)} \leq \int_0^2 e^{x^2-x}dx \leq 2e^2$$

ΑΣΚΗΣΗ

2.11. Να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{20}{29} < \int_{1/2}^{5/2} \frac{x}{1+x^2}\,dx < 1$

β) $3 < \int_0^2 \frac{x^2+5}{x^2+2}\,dx < 5$

γ) $\frac{\pi}{2} < \int_0^{\pi/2} \sqrt{1+\frac{1}{2}\sin^2 x}\,dx < \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$

§ 2.6. ΤΟ ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΣ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

Στην παράγραφο αυτή κυριαρχεί ένα θεώρημα, γνωστό ως "θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού" το οποίο λέει ότι η παραγώγιση και η ολοκλήρωση είναι αντίστροφοι τελεστές.

Για να φτάσουμε όμως πιο ομαλά στο θεώρημα αυτό, ας δούμε πρώτα μερικά βοηθητικά πράγματα.

Ας υποθέσουμε ότι η $f\colon I=[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ είναι μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Για κάθε x με $\alpha \leq x \leq \beta$, ο περιορισμός της f στο διάστημα $[\alpha,x]$ είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση, από το θεώρημα 2.12. Συνεπώς μπορούμε να ορίσουμε μια συνάρτηση $F\colon I \to \mathbb{R}$ με

$$F(x)=\int_\alpha^x f(t)\,dt$$

Η F λέγεται **αόριστο ολοκλήρωμα** της f. Παρατηρούμε ότι $F(\alpha)=0$. Μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση δεν χρειάζεται να είναι συνεχής. Όμως η F είναι πάντα συνεχής όπως δείχνει το επόμενο

Θεώρημα 2.17. Αν η $f\colon I=[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο I, τότε η συνάρτηση $F\colon I \to \mathbb{R}$ με

$$F(x)=\int_\alpha^x f(t)\,dt$$

είναι ομοιόμορφα συνεχής στο I.

Απόδειξη

Έστω $x,y \in I$. Τότε

$$F(y)-F(x)=\int_\alpha^y f(t)\,dt-\int_\alpha^x f(t)\,dt$$

$$=\int_\alpha^x f(t)\,dt+\int_x^y f(t)\,dt-\int_\alpha^x f(t)\,dt=\int_x^y f(t)\,dt$$

Από το Θεώρημα 2.15 έχουμε:

$$\left|\int_x^y f(t)\,dt\right| \leq \begin{cases} \int_x^y |f(t)|\,dt, & \text{αν } x \leq y \\ \int_y^x |f(t)|\,dt & \text{αν } x > y \end{cases}$$

Αφού η f είναι ολοκληρώσιμη, θα είναι φραγμένη, δηλ. υπάρχει $K>0$ τέτοιο ώστε $|f(x)| \leq K$, $\forall x \in I$. Συνεπώς

$$|F(x)-F(y)| \leq \left|\int_x^y |f(t)|\,dt\right| \leq K|x-y|$$

Άρα για δοσμένο $\varepsilon>0$, υπάρχει $\delta=\frac{\varepsilon}{K}$, τέτοιο ώστε, για όλα τα $x,y \in I$ με $|x-y|<\delta$ να έχουμε: $|F(x)-F(y)|<\varepsilon$. Αυτό σημαίνει ότι η F είναι ομοιόμορφα συνεχής στο I. ■

Παράδειγμα 2.9.

Έστω $f\colon[-1,1] \to \mathbb{R}$ με

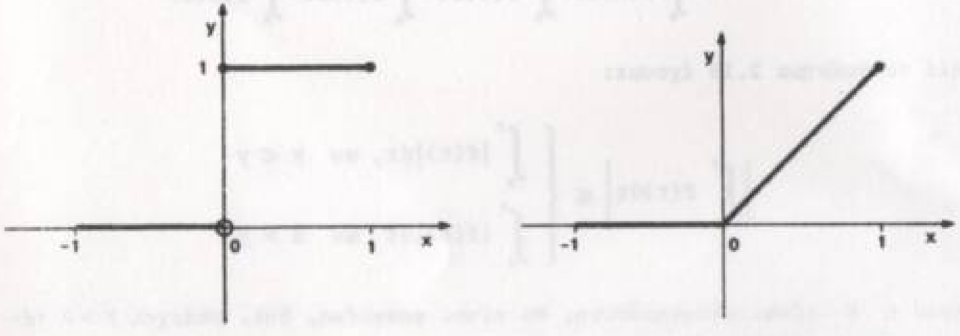
$$f(x)=\begin{cases} 0, & -1 \leq x \leq 0 \\ 1, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Είναι $I=[-1,1]$. Τότε για $x \in I$ είναι:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & -1\leq x\leq 0 \\ x, & 0<x\leq 1\end{cases}$$

Πραγματικά· για να το δούμε αυτό παρατηρούμε ότι αν $0<x\leq 1$ η διαμέριση $P=\{-1,0,x\}$ του διαστήματος $[-1,x]$ δίνει $L(P,f)=x=U(P,f)$. Συνεπώς $F(x)=\int_{-1}^{x} f(t)dt=x$. Για $-1\leq x\leq 0$ προφανώς $F(x)=0$.

Παρατηρούμε τώρα τα εξής: η f δεν είναι συνεχής στο 0 ενώ η F είναι. Όμως η F δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0 (στο σημείο ασυνέχειας της f). Βλέπε και σχήμα 2.6.



Σχήμα 2.6.

Είναι ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε ότι αν το ολοκλήρωμα $\int_{a}^{x} f(t)dt$ ορίζει μια παραγωγίσιμη συνάρτηση στο I, δεν συνεπάγεται αναγκαστικά ότι αυτή η παράγωγος είναι η συνάρτηση f. Για παράδειγμα αν $f:[0,1]\to \mathbb{R}$ με

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\neq \frac{1}{2} \\ 1, & x=\frac{1}{2}\end{cases}$$

τότε η f δεν είναι παράγωγος καμμιάς συναρτήσεως στο $[0,1]$. (Βλέπε παράδειγμα 1.1).

Αν όμως στρέψουμε την προσοχή μας στα σημεία συνέχειας της f τότε έχουμε το ακόλουθο

Θεώρημα 2.18. Έστω $f: I\to \mathbb{R}$ μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο $I=[\alpha,\beta]$ και $F: I\to \mathbb{R}$ η συνάρτηση που ορίζεται από την $F(x)=\int_{a}^{x} f(t)dt$. Τότε η F είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο x_0 στο οποίο η f είναι συνεχής, και μάλιστα $F'(x_0)=f(x_0)$

Απόδειξη

Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0\in I$. Τότε, για κάθε $\varepsilon>0$, υπάρχει $\delta>0$, τέτοιο ώστε: $|f(x_0+h)-f(x_0)|<\varepsilon$ όταν $|h|<\delta$ και $x_0+h\in I$. Για οποιοδήποτε τέτοιο h, χρησιμοποιώντας την παρατήρηση ότι $\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} 1\cdot dx=1$, έχουμε:

$$\left|\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}-f(x_0)\right|=\left|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx-f(x_0)\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} 1dt\right|$$

$$=\frac{1}{|h|}\left|\int_{x_0}^{x_0+h}(f(x)-f(x_0))dx\right|$$

$$\leq\frac{1}{|h|}\left|\int_{x_0}^{x_0+h}|f(x)-f(x_0)|dx\right|$$

$$\leq\frac{1}{|h|}\cdot\varepsilon|h|=\varepsilon.$$

Δηλαδή $F'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=f(x_0)$. ■

Πόρισμα: Αν η $f: I\to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο I και $F:I\to \mathbb{R}$ με $F(x)=\int_{a}^{x} f(t)dt$, τότε η F' υπάρχει και $F'(x)=f(x), \forall x\in[\alpha,\beta]$

Παρατήρηση 2.17.

Όπως ξέρουμε μια παραγωγίσιμη συνάρτηση F, αν υπάρχει, τέτοια ώστε η παράγωγός της F' να ισούται με την f, λέγεται *αρχική* ή *παράγουσα* ή *αντιπαράγωγος* της f. Το προηγούμενο θεώρημα 2.18 δίνει μια *ικανή συνθήκη* για να υπάρχει αρχική μιας συναρτήσεως. Είναι η συνθήκη της συνέχειας. Έτσι, *κάθε συνεχής συνάρτηση έχει τουλάχιστο μια αρχική και μάλιστα το αόριστο ολοκλήρωμα F της f είναι αρχική της f*. Το ότι η συνέχεια μιας συναρτήσεως δεν είναι και *αναγκαία συνθήκη* για την ύπαρξη αρχικής ας το διαπιστώσουμε με ένα παράδειγμα*:

Ας θεωρήσουμε την συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ με

$$f(x)=\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

Αυτή έχει αρχική συνάρτηση την $F:[0,1]\to\mathbb{R}$ με

$$F(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

αφού $F'(x)=f(x)$, $\forall x\in[0,1]$. Η f όμως δεν είναι συνεχής στο 0.

Παρατήρηση 2.18.

Μια συνάρτηση $F: I\to\mathbb{R}$ μπορεί να είναι παραγωγίσιμη, με παράγωγο $F'(x)=f(x)$, $\forall x\in I$ και η f να μην είναι ολοκληρώσιμη. Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα την συνάρτηση $F:[-1,1]\to\mathbb{R}$ με

$$F(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x^2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

Τότε η F είναι παραγωγίσιμη $\forall x\in I$ με

$$F'(x)=f(x)=\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

---

* Βλέπε και Παρατήρηση 1.3.

Επειδή $f\left(\frac{1}{\sqrt{2\nu\pi}}\right)=2\sqrt{2\nu\pi}\to+\infty$, $\nu\in\mathbb{N}$ η f δεν είναι φραγμένη στην περιοχή του μηδενός και άρα δεν είναι ολοκληρώσιμη.

Παρατήρηση 2.19.

Αν στο Θεώρημα 2.18 η f είναι συνεχής από δεξιά στο α τότε $F'_+(\alpha)=f(\alpha)$, ενώ αν είναι συνεχής από αριστερά στο β, τότε $F'_-(\beta)=f(\beta)$.

Παράδειγμα 2.10.

Ας βρούμε την F΄ της $F:[0,1]\to\mathbb{R}$ με $F(x)=\int_0^x \sin(t^2)dt$. Επειδή η $f(x)=\sin(x^2)$ είναι συνεχής στο $[0,1]$, από τον Πόρισμα του Θεωρήματος 2.18 θα έχουμε:

$$F'(x)=\sin(x^2).$$

Είμαστε τώρα σε θέση να δώσουμε το θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού, που αναφέραμε στην αρχή της παραγράφου.

Θεώρημα 2.19 (Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού). Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $I=[\alpha,\beta]$. Τότε μια συνάρτηση $F:I\to\mathbb{R}$ ικανοποιεί την σχέση:

$$\int_\alpha^x f(t)dt=F(x)-F(\alpha) \qquad (*)$$

αν και μόνο αν, $F'(x)=f(x)$, $\forall x\in I$.

Απόδειξη

Ας υποθέσουμε ότι η (*) ισχύει. Τότε θέτοντας $G(x)=\int_\alpha^x f(t)dt$ έχουμε $G(x)=F(x)-F(\alpha)$, $\forall x\in I$. Από το Πόρισμα του Θεωρήματος 2.18, αφού η f είναι συνεχής έχουμε:

$$G'(x)=f(x)=F'(x),\ \forall x\in I$$

Αντίστροφα, αν $F:I \to \mathbb{R}$ είναι τέτοια ώστε $F'(x)=f(x)$, $\forall x \in I$ τότε θα έχουμε: $F'(x)=G'(x)$, $\forall x \in I$. Αλλά ξέρουμε ότι, δυο συναρτήσεις που έχουν ίσες παραγώγους θα διαφέρουν κατά σταθερή. Συνεπώς υπάρχει c τέτοιο ώστε:

$$F(x)=G(x)+c$$

Επειδή $G(\alpha)=0$, έχουμε $c=F(\alpha)$ και άρα

$$F(x)-F(\alpha)=G(x)=\int_\alpha^x f(t)dt \ \blacksquare$$

Πόρισμα: Αν η $f:I \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο I και $F'(x)=f(x)$ $\forall x \in I$, τότε:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx=F(\beta)-F(\alpha)$$

Ας κάνουμε μια διεξοδικότερη συζήτηση για να ξεκαθαρίσουμε τις έννοιες **"αρχική"** και **"αόριστο ολοκλήρωμα"**. Είπαμε πως αρχική λέγεται μια συνάρτηση F για την οποία $F'(x)=f(x)$, $\forall x \in I$. Συνοψίζοντας έχουμε ότι **αρχική συνάρτηση F μιας συναρτήσεως f σε ένα διάστημα I**

1) **υπάρχει αν η f είναι συνεχής**
2) **μπορεί να υπάρχει και όταν η f δεν είναι συνεχής.** (Παρατήρηση 2.17)
3) **μπορεί να υπάρχει και όταν η f δεν είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann** (Παρατήρηση 2.18)
4) **μπορεί να μην υπάρχει** (Παράδειγμα 1.1)

Επίσης το αόριστο ολοκλήρωμα F μιας ολοκληρώσιμης συναρτήσεως f είναι η συνάρτηση $F(x)=\int_\alpha^x f(t)dt$. Από το θεώρημα 2.19 αν η f έχει αρχική G τότε το αόριστο ολοκλήρωμα είναι:

$$F(x)=\int_\alpha^x f(t)dt=G(x)-G(\alpha), x \in I \qquad (1)$$

Σ'αυτήν την περίπτωση το αόριστο ολοκλήρωμα F είναι επίσης

και αρχική της f στο I και

$$\int f(x)dx=c+\int_\alpha^x f(t)dt, \forall x \in I \qquad (2$$

Ο τύπος (2) έχει έννοια μόνο αν η f έχει αρχική στο I κα είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann. **Όμως το αόριστο ολοκλήρω μα της f μπορεί να υπάρχει στο I και η f να μην έχει αρχι στο I.** Για παράδειγμα η συνάρτηση του παραδείγματος 1.1 δε έχει αρχική, αλλά είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann σε κάθ κλειστό υποδιάστημα του $\mathbb{R}$ και το $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ υπάρχ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Δεν πρέπει να νομιστεί ότι **όλες οι αρχικές μιας συνα τήσεως f, αν υπάρχουν, δίνονται από τον τύπο (1) για διάφ ρες τιμές του α. Για παράδειγμα είναι:**

$$\int_\alpha^x \cos t dt=\sin x-\sin\alpha \qquad ($$

Μια αρχική της $f(x)=\cos x$ είναι προφανώς η $G(x)=7+\sin x, x \in$ η οποία όμως δεν μπορεί να προκύψει από τον τύπο (3) γ καμμιά τιμή του α, αφού $|-\sin\alpha| \leq 1$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Παρατήρηση 2.20.

Ο τύπος (*) είναι γνωστός ως "τύπος των Newto Leibnitz" και δείχνει την σχέση που υπάρχει μεταξύ του ορ σμένου και του αόριστου ολοκληρώματος. Δίνει και μια μέθοδο υπολο σμού του ορισμένου ολοκληρώματος. Υπολογίζουμε πρώτα το αόριστο ολοκ ρωμα της f και μετά αντικαθιστούμε τις τιμές στα άκρα ολοκληρώσε Τότε η διαφορά της τιμής στο κάτω άκρο από την τιμή στο επάνω άκρο ναι η τιμή του ολοκληρώματος. Γι' αυτό συνήθως χρησιμοποιείται ο συ βολισμός

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx=F(x)\Big|_\alpha^\beta=F(\beta)-F(\alpha)$$

Προσοχή! Το αόριστο ολοκλήρωμα μιας συναρτήσεως f ε ναι συνάρτηση, ενώ το ορισμένο ολοκλήρωμα της f είναι αρι μός.

Παράδειγμα 2.11.

Το ολοκλήρωμα $\int_0^1 x dx$ του παραδείγματος 2.2 υπολογίζεται πολύ πιο εύκολα με τον τύπο των Newton-Leibniz ως εξής:

$$\int_0^1 x dx=\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}$$

Παρατήρηση 2.21.

Η εφαρμογή του τύπου των Newton-Leibniz απαιτεί μεγάλη προσοχή. Ο τύπος εφαρμόζεται όταν θέλουμε να υπολογίσουμε ορισμένα ολοκληρώματα συνεχών συναρτήσεων και η σχέση $F'(x)=f(x)$ ισχύει για κάθε $x\in I$. Ειδικά η F πρέπει να είναι συνεχής σ' ολόκληρο το I. Αν για F χρησιμοποιηθεί μια ασυνεχής συνάρτηση θα οδηγηθούμε σε λαθεμένα και τις περισσότερες φορές, σε παράξενα συμπεράσματα. Παρακολουθήστε προσεκτικά τα παρακάτω παραδείγματα:

Παράδειγμα 2.12.

Επειδή $\left(\frac{1}{2}\mathrm{Artg}\,\frac{2x}{1-x^2}\right)'=\frac{1}{1+x^2}$, $x\neq 1$ θα έχουμε:

$$\int_0^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{1}{2}\,\mathrm{Artg}\,\frac{2x}{1-x^2}\Big|_0^{\sqrt{3}}=-\frac{\pi}{6}$$

Δηλ. το ολοκλήρωμα μιας συναρτήσεως παντού θετικής, είναι αρνητικό! Συμπέρασμα προφανώς λάθος (Βλέπε Θεώρημα 2.14). Το λάθος βρίσκεται στο ότι η $F(x)=\frac{1}{2}\,\mathrm{Artg}\,\frac{2x}{1-x^2}$ δεν ορίζεται για $x=1\in[0,\sqrt{3}]$. Η σωστή λύση είναι:

$$\int_0^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x^2}=\mathrm{Artg}x\Big|_0^{\sqrt{3}}=\mathrm{Artg}\,\sqrt{3}-\mathrm{Artg}0=\frac{\pi}{3}$$

Έστω πως θέλουμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\int_0^\pi\frac{dx}{1+2\sin^2x}$ Επειδή $\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{Artg}(\sqrt{3}\mathrm{tg}x)\right]'=\frac{1}{1+2\sin^2x}$ θα έχουμε:

$$\int_0^\pi\frac{dx}{1+2\sin^2x}=\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{Artg}(\sqrt{3}\mathrm{tg}x)\Big|_0^\pi=0$$

Δηλ. το ολοκλήρωμα συνεχούς και παντού θετικής συναρτήσεως, είναι μηδέν. Να δικαιολογήσετε γιατί είναι λάθος και να βρήτε το σωστό.

Αν η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη και έχει μια παράγουσα, τότε η συνέχεια της f δεν είναι ουσιώδης στο Θεώρημα 2.19, όπως δείχνει η παρακάτω γενίκευσή του, που οφείλεται στον Cauchy.

Θεώρημα 2.20. Αν η $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη και η συνεχής συνάρτηση $F:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο (α,β) και $F'(x)=f(x)$, $\forall x\in(\alpha,\beta)$, τότε:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx=F(\beta)-F(\alpha)$$

Απόδειξη

Έστω $P=\{x_0,x_1,\dots,x_\nu\}$ μια τυχαία διαμέριση του $[\alpha,\beta]$. Τότε από το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού, υπάρχουν σημεία $\xi_k\in(x_{k-1},x_k)$, $k=1,2,\dots,\nu$ τέτοια ώστε:

$$F(x_k)-F(x_{k-1})=F'(\xi_k)(x_k-x_{k-1})=f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})$$

Συνεπώς:

$$F(\beta)-F(\alpha)=\sum_{k=1}^{\nu}\{F(x_k)-F(x_{k-1})\}=\sum_{k=1}^{\nu}f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})$$

Θεωρώντας τα $\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_k$ ως ενδιάμεσα σημεία της διαμέρισης P έχουμε ότι το άθροισμα του Riemann $S(P,f,\Xi)$ για την f είναι το $F(\beta)-F(\alpha)$. Επειδή

$$L(P,f)\leqslant F(\beta)-F(\alpha)\leqslant U(P,f)$$

και η f είναι ολοκληρώσιμη στο I, έχουμε:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx=L=U=F(\beta)-F(\alpha)=$$

**Πόρισμα: Αν η f είναι παραγωγίσιμη και η f' είναι ολο-
ληρώσιμη στο I, τότε:**

$$\int_\alpha^\beta f'(x)dx = f(\beta)-f(\alpha)$$

αράδειγμα 2.13.

Ας βρούμε την τιμή του ολοκληρώματος:

$$\int_0^{2/\pi}\left(2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right)dx$$

δώ είναι $f(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$, $x\neq 0$. Μπορούμε να την ορίσουμε και στο 0, αλλά όποια τιμή και να της δώσουμε η f είναι ασυνεχής στο 0. Για $x\neq 0$ προφανώς είναι συνεχής. Επίσης η f είναι φραγμένη στο $\left(0,\frac{2}{\pi}\right]$ και συνεπώς είναι ολοκληρώσιμη στο $\left(0,\frac{2}{\pi}\right]$. Για να υπολογίσουμε το ολο-κλήρωμα ορίζουμε την συνάρτηση $F:\left[0,\frac{2}{\pi}\right]\to\mathbb{R}$ με

$$F(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

Αυτή προφανώς είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{2}{\pi}\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left[0,\frac{2}{\pi}\right]$ με $F'(x)=f(x)$ για $x\neq 0$.

Το θεώρημα 2.19 δεν εφαρμόζεται αφού η f δεν είναι συνεχής στο 0. Το θεώρημα 2.20 όμως εφαρμόζεται και συνεπώς:

$$\int_0^{2/\pi}\left(2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right)dx=F\left(\frac{2}{\pi}\right)-F(0)=\frac{4}{\pi^2}$$

Παράδειγμα 2.14

Ας θεωρήσουμε την $f(x)=\frac{1}{x^3}$, $x\in[\alpha,\beta]$, $\alpha>0$. Θα υπολογίσουμε το $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ χωρίς χρήση των θεωρημάτων 2.19 και 2.20. Έστω $g(x)=-\frac{1}{2x^2}$,

$x\in[\alpha,\beta]$. Για τυχαία διαμέριση P του $[\alpha,\beta]$ διαλέγουμε ενδιάμεσα σημεία $\xi_k\in(x_{k-1},x_k)$ σύμφωνα με το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού. Τότε

$$f(\xi_k)=g'(\xi_k)=\frac{g(x_k)-g(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}=\frac{-\frac{1}{2x_k^2}+\frac{1}{2x_{k-1}^2}}{x_k-x_{k-1}}=\frac{x_k+x_{k-1}}{2(x_k^2\,x_{k-1}^2)}$$

και άρα

$$S(P,f,\Xi)=\sum_{k=1}^{\nu} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})=\sum_{k=1}^{\nu}\left(\frac{1}{2x_{k-1}^2}-\frac{1}{2x_k^2}\right)=\frac{\beta^2-\alpha^2}{2\alpha^2\beta^2}.$$

Αυτό συνεπάγεται ότι $\int_\alpha^\beta f(x)dx=\frac{\beta^2-\alpha^2}{2\alpha^2\beta^2}$.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Αν $e^2<\alpha<\beta$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ τότε να αποδείξετε ότι:

$$\int_\alpha^\beta\frac{dt}{\log t}<\frac{2\beta}{\log\beta}$$

Απόδειξη

Θεωρούμε την συνάρτηση $F(x)=\frac{2x}{\log x}-\int_\alpha^x\frac{dt}{\log t}$, $x\in[\alpha,\beta]$. Η F είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ με

$$F'(x)=\frac{\log x-2}{(\log x)^2}$$

Επειδή $x>e^2$, θα είναι $F'(x)>0$, $\forall x\in[\alpha,\beta]$. Συνεπώς, αφού $\alpha<\beta$ θα έχουμε $F(\alpha)<F(\beta)$, δηλ.

$$0<\frac{2\alpha}{\log\alpha}<\frac{2\beta}{\log\beta}-\int_\alpha^\beta\frac{dt}{\log t}\quad\text{ή}\quad\int_\alpha^\beta\frac{dt}{\log t}<\frac{2\beta}{\log\beta}$$

2. Να βρεθούν οι μη μηδενικές και παραγωγίσιμες συναρτήσεις, που ικανοποιούν την εξίσωση:

$$\int_0^x t\varphi(t)dt=x^2\varphi(x)$$

Λύση

Παραγωγίζοντας και τα δυο μέλη της εξίσωσης έχουμε:

$$x\varphi(x)=2x\varphi(x)+x^2\varphi'(x)$$

ή

$$x\varphi'(x)=-\varphi(x),\ x\neq 0$$

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}=-\frac{1}{x}$$

Ολοκληρώνοντας παίρνουμε:

$$\log|\varphi(x)|=-\log|x|+\log|k|=\log\frac{|k|}{|x|}$$

ή

$$\varphi(x)=\frac{k}{x},\ x\neq 0$$

3. Μια συνάρτηση f θα λέγεται **φραγμένης μεταβολής** στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, αν υπάρχει σταθερή K, τέτοια ώστε:

$$\sum_{k=1}^{\nu}|f(x_k)-f(x_{k-1})|\leq K$$

για οποιαδήποτε διαμέριση $P=\{x_0,x_1,\ldots,x_\nu\}$ του $[\alpha,\beta]$. (Ο μικρότερος αριθμός με αυτή την ιδιότητα λέγεται **ολική μεταβολή** της f στο $[\alpha,\beta]$). Να αποδείξετε ότι:

α) Αν η f είναι μονότονη στο $[\alpha,\beta]$, τότε αυτή είναι φραγμένης μεταβολής στο $[\alpha,\beta]$.

β) Αν η f έχει συνεχή παράγωγο στο $[\alpha,\beta]$, τότε αυτή είναι φραγμένης μεταβολής στο $[\alpha,\beta]$.

γ) Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha,\beta]$, τότε η συνάρτηση $F(x)=\int_\alpha^x f(t)dt$ είναι φραγμένης μεταβολής στο $[\alpha,\beta]$.

Απόδειξη

α) Ας υποθέσουμε ότι η f είναι αύξουσα. (Η περίπτωση που η f είναι φθίνουσα εξετάζεται ανάλογα). Τότε $f(x_{k-1})\leq f(x_k)$, $k=1,2,\ldots,\nu$. Συνεπώς:

$$\sum_{k=1}^{\nu}|f(x_{k-1})-f(x_k)|=\sum_{k=1}^{\nu}\{f(x_k)-f(x_{k-1})\}=f(\beta)-f(\alpha)<+\infty$$

β) Αφού η f' είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ θα είναι φραγμένη· έστω $|f'(x)|\leq M$, $\forall x\in[\alpha,\beta]$. Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού έχουμε ότι:

$$f(x_k)-f(x_{k-1})=f'(\xi_k)(x_k-x_{k-1}),\ x_{k-1}<\xi_k<x_k$$

Άρα

$$\sum_{k=1}^{\nu}|f(x_k)-f(x_{k-1})|=\sum_{k=1}^{\nu}|f'(\xi_k)||x_k-x_{k-1}|\leq M\sum_{k=1}^{\nu}(x_k-x_{k-1})$$

$$=M(\beta-\alpha)\equiv K$$

γ) Θα έχουμε:

$$\sum_{k=1}^{\nu}|F(x_k)-F(x_{k-1})|=\sum_{k=1}^{\nu}\left|\int_{x_{k-1}}^{x_k}f(t)dt\right|\leq\sum_{k=1}^{\nu}\int_{x_{k-1}}^{x_k}|f(t)|dt$$

$$=\int_\alpha^\beta|f(t)|dt$$

Επομένως, αφού το $\int_\alpha^\beta|f(t)|dt$ είναι αριθμός ανεξάρτητος από την διαμέριση P που θεωρούμε, συνεπάγεται ότι η F είναι φραγμένης μεταβολής στο $[\alpha,\beta]$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

2.12. Δίνεται η συνάρτηση $F:[-2,2]\to\mathbb{R}$ με

$$F(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{\pi}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

Να αποδείξετε ότι το θεώρημα 2.20 εφαρμόζεται, ενώ το 2.19 όχι.

2.13. Δίνεται η συνάρτηση $F:[0,1]\to\mathbb{R}$ με

$$F(x)=\begin{cases} x\sqrt{x}\cos\dfrac{1}{x}, & 0<x\leqslant 1 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

Να αποδείξετε ότι η παράγωγός της δεν είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, 1]$. Να σχολιάσετε το γεγονός σε σχέση με το θεώρημα 2.19.

2.14. Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=1$ και $F:[0,1]\to\mathbb{R}$ με

$$F(x)=\begin{cases} 1, & x=0 \\ x, & 0<x<1 \\ 0, & x=1 \end{cases}$$

Τότε να αποδείξετε ότι $F'(x)=f(x)$, $\forall x\in(0,1)$, αλλά $F(1)-F(0)=-1\neq\int_0^1 f(x)dx$. Να δώσετε εξηγήσεις.

2.15. Έστω $f:[0,3]\to\mathbb{R}$ με

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0\leqslant x<1 \\ 1, & 1\leqslant x<2 \\ x, & 2\leqslant x\leqslant 3 \end{cases}$$

Να βρήτε αναλυτική έκφραση της $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ σαν συνάρτησης του x. Που είναι η F παραγωγίσιμη; Να υπολογίσετε την $F'(x)$ σε όλα τα σημεία που η F είναι παραγωγίσιμη.

2.16. Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση, και $\varphi:[\gamma,\delta]\to\mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση, τέτοια ώστε: $\varphi([\gamma,\delta])\subseteq[\alpha,\beta]$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $F:[\gamma,\delta]\to\mathbb{R}$ με

$$F(x)=\int_\alpha^{\varphi(x)} f(t)dt$$

είναι παραγωγίσιμη και ισχύει: $F'(x)=(f\circ\varphi)(x)\varphi'(x)$, $\forall x\in[\gamma,\delta]$

2.17. Να υπολογίσετε την F' αν η F ορίζεται στο $[0,1]$ ως εξής:

α) $F(x)=\int_1^{2x}\dfrac{\sin t}{t^2}dt$ β) $F(x)=\int_2^{e^x}\dfrac{\log t}{t}dt$

γ) $F(x)=\int_{x^2}^{1}\log t\,dt$ δ) $F(x)=\int_{x^3}^{2}\log t\,dt$

ε) $F(x)=\int_x^{2x}\log^2 t\,dt$ στ) $F(x)=\int_{1/x}^{\sqrt{x}}\cos(t^2)dt$

ζ) $F(x)=\int_{x^2}^{x}\sqrt{1+t^2}dt$ η) $F(x)=\int_0^{\sin x}\cos t\,dt$

2.18. Να βρεθούν τα ακρότατα των συναρτήσεων:

α) $F(x)=\int_0^x\dfrac{\sin t}{t}dt$, $x>0$ β) $F(x)=\int_0^x\dfrac{2t+1}{t^2-2t+2}dt$, $|x|\leqslant 1$

2.19. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και φθίνουσα στο $[\alpha,\beta]$ τότε να αποδείξετε ότι και η συνάρτηση $F(x)=\int_x^{x+1}f(t)dt$ είναι επίσης φθίνουσα στο $[\alpha,\beta]$.

2.20. Αν η $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής και $\lambda\in\mathbb{R}$, $0<\lambda<1$ τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε:

$$\int_\alpha^\xi f(x)dx=\lambda\int_\alpha^\beta f(x)dx \text{ αν } \int_\alpha^\beta f(x)dx\neq 0.$$

2.21. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $\int_{-2}^{3}|x^2-x-2|dx$ β) $\int_0^{\pi}\left|\dfrac{1}{2}+\cos x\right|dx$

γ) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}|x-\sin x|dx$ δ) $\int_0^{2\pi}|\sin x-\cos x|dx$

ε) $\int_{-1/2}^{2}\dfrac{x|x|}{|x+1|}dx$ στ) $\int_{-1/2}^{1/2}\dfrac{|x(x-1)|}{x^2-1}dx$

2.22. Να αποδείξετε ότι: $\int_\alpha^\beta x|x|dx=\frac{1}{3}(|\beta|^3-|\alpha|^3)$

2.23. Αν $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^+$, να αποδείξετε ότι: $\int_0^\beta\left(\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{1}{1+\alpha+x}\right)dx>0$. Από αυτό να συμπεράνετε ότι: $\log(1+\alpha)+\log(1+\beta)>\log(1+\alpha+\beta)$

2.24. Να βρεθεί συνάρτηση φ τέτοια ώστε: $1+\int_0^x \varphi(t)e^t dt=(1+x^2)e^x$

2.25. Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής. Υποθέτουμε ότι:

$$\int_0^x f(t)dt=\int_x^1 f(t)dt,\ \forall x\in[0,1]$$

Να αποδείξετε ότι $f(x)=0,\ \forall x\in[0,1]$

2.26. Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση με $f(x)>0,\ \forall x\in[\alpha,\beta]$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $F(x)=\int_\alpha^x f(t)dt, x\in[\alpha,\beta]$ είναι αύξουσα στο $[\alpha,\beta]$. Αν επί πλέον η f είναι και συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, τότε να αποδείξετε ότι η F είναι γνήσια αύξουσα στο $[\alpha,\beta]$.

§ 2.7. ΒΑΣΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΟΡΙΣΜΕΝΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ

Θα δώσουμε τώρα δυο βασικές μεθόδους υπολογισμού των ορισμένων ολοκληρωμάτων που βασίζονται στο Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού. Είναι οι γνωστές από το αόριστο ολοκλήρωμα "μέθοδος της παραγοντικής ολοκλήρωσης" και "μέθοδος της αντικατάστασης".

Θεώρημα 2.21 (Παραγοντική ολοκλήρωση). Αν f και g είναι συναρτήσεις τέτοιες ώστε οι f' και g' να υπάρχουν και να είναι ολοκληρώσιμες στο $[\alpha,\beta]$, τότε:

$$\int_\alpha^\beta f'(x)g(x)dx=f(x)g(x)\big|_\alpha^\beta-\int_\alpha^\beta f(x)g'(x)dx$$

$$=f(\beta)g(\beta)-f(\alpha)g(\alpha)-\int_\alpha^\beta f(x)g'(x)dx$$

Απόδειξη

Αφού οι f' και g' υπάρχουν, οι f και g είναι συνεχείς και άρα ολοκληρώσιμες. Επίσης οι fg' και $f'g$ είναι ολοκληρώσιμες, ως γινόμενα ολοκληρώσιμων συναρτήσεων. Επειδή $(f\cdot g)'=f'\cdot g+fg'$ συνεπάγεται ότι η $(f\cdot g)'$ είναι ολοκληρώσιμη, και

$$\int_\alpha^\beta (f(x)g(x))'dx=\int_\alpha^\beta f'(x)g(x)dx+\int_\alpha^\beta f(x)g'(x)dx$$

Από το Πόρισμα του Θεωρήματος 2.20 έχουμε:

$$f(\beta)g(\beta)-f(\alpha)g(\alpha)=\int_\alpha^\beta f'(x)g(x)dx+\int_\alpha^\beta f(x)g'(x)dx$$

από την οποία το συμπέρασμα είναι προφανές. ■

Θεώρημα 2.22 (Αλλαγή ανεξάρτητης μεταβλητής). Έστω $\varphi:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση με συνεχή παράγωγο στο $[\alpha,\beta]$. Αν $A=\varphi(\alpha)$, $B=\varphi(\beta)$ και η f είναι συνεχής στο $\varphi([\alpha,\beta])$ τότε:

$$\int_A^B f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Απόδειξη

Αφού η f είναι συνεχής στο διάστημα $\varphi([\alpha,\beta])$, από το Πόρισμα του Θεωρήματος 2.18, υπάρχει συνάρτηση F, τέτοια ώστε:

$$F'(x)=f(x),\ x\in\varphi([\alpha,\beta]).$$

Έστω $G(t)=F(\varphi(t)),\ t\in[\alpha,\beta]$. Τότε από το θεώρημα παραγώγισης σύνθετης συναρτήσεως έχουμε ότι:

$$G'(t)=F'(\varphi(t))\varphi'(t)=f(\varphi(t))\varphi'(t), t\in[\alpha,\beta]$$

Με την βοήθεια τώρα του Θεωρήματος 2.19 παίρνουμε:

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=\int_\alpha^\beta G'(t)dt=G(\beta)-G(\alpha)$$

$$=F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha))=F(B)-F(A)$$

$$=\int_A^B F'(x)dx=\int_A^B f(x)dx \ ■$$

Παράδειγμα 2.15.

Ας υπολογίσουμε με την βοήθεια του παραπάνω θεωρήματος το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^{\alpha} \sqrt{\alpha^2-x^2}dx, \ \alpha>0$$

θέτουμε $x=\varphi(t)=\alpha\cdot\sin t$, $-\frac{\pi}{2}\leq t\leq\frac{\pi}{2}$. Τότε $\varphi'(t)=\alpha\cos t$ και

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\sqrt{\alpha^2-x^2}dx=\alpha^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2 t dt=\frac{1}{2}\alpha^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1+\cos 2t)dt$$

$$=\frac{1}{2}\alpha^2\left[t+\frac{1}{2}\sin 2t\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}=\frac{1}{2}\pi\alpha^2$$

Παρατηρούμε ότι δεν είναι απαραίτητο, όπως στο αόριστο ολοκλήρωμα, να εκφράσουμε την παράσταση $t+\frac{1}{2}\sin 2t$ συναρτήσει του x. Αυτός είναι και ο λόγος που στο θεώρημα 2.22 δεν απαιτούμε $\varphi'(t)\neq 0$, δηλ. η φ να έχει αντίστροφη συνάρτηση.

Παράδειγμα 2.16.

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα [0,1]. Τότε αν $\varphi(t)=\sin t$, θα έχουμε: $\varphi(0)=0$, $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$. Αφού η $\varphi'(t)=\cos t$ είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ και η f είναι συνεχής στο $\varphi\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)=[0,1]$, από το θεώρημα 2.22 θα έχουμε:

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^{\pi/2} f(\sin t)\cos t dt$$

Παρατηρούμε επίσης ότι $\varphi(\pi)=0$ και $\varphi\left(\frac{5\pi}{2}\right)=1$. Αφού η φ' είναι συνεχής στο $\left[\pi,\frac{5\pi}{2}\right]$ θα έχουμε επίσης ότι

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_{\pi}^{5\pi/2} f(\sin t)\cos t dt$$

με την προϋπόθεση ότι η f είναι συνεχής στο [-1,1], που είναι η εικόνα του $\left[\pi,\frac{5\pi}{2}\right]$ κάτω από την φ.

(Θυμηθείτε ότι από το Θεώρημα 4.10 του Απειροστικού Λογισμού 1 η εικόνα ενός κλειστού διαστήματος [α,β] κάτω από μια συνεχή συνάρτηση είναι το κλειστό και φραγμένο διάστημα [m,M], όπου m=minf, M=maxf και όχι το [f(α),f(β)]).

Για παράδειγμα αν $f(x)=\sqrt{x}$ θα έχουμε:

$$\int_0^1\sqrt{x}dx=\int_0^{\pi/2}\sqrt{\sin t}\cdot\cos t dt$$

Δεν είναι όμως σωστή η ισότητα

$$\int_0^1\sqrt{x}dx=\int_{\pi}^{5\pi/2}\sqrt{\sin t}\cdot\cos t dt$$

γιατί η $\sqrt{x}$ δεν ορίζεται στο διάστημα $-1<x<0$.

Γίνεται έτσι φανερό ότι τα A και B δεν είναι αναγκαστικά άκρα του διαστήματος.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Οι συναρτήσεις f και g είναι τέτοιες ώστε οι f και f·g να είναι ολοκληρώσιμες στο διάστημα [0,α], και f(x)=f(α-x), g(x)+g(α-x)=k, ∀x ∈[0,α], όπου k σταθερός αριθμός. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_0^{\alpha} f(x)g(x)dx=\frac{1}{2}k\int_0^{\alpha} f(x)dx$$

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

Απόδειξη

Κάνουμε την αντικατάσταση x=α-t στο ολοκλήρωμα $\int_0^{\alpha} f(x)g(x)\,dx$.

Τότε έχουμε: dx=-dt και t=α για x=0 και t=0 για x=α. Επομένως:

$$\int_0^a f(x)g(x)dx=-\int_a^0 f(a-t)g(a-t)dt=\int_0^a f(a-t)g(a-t)dt$$

$$=\int_0^a f(t)\{k-g(t)\}dt=k\int_0^a f(t)dt-\int_0^a f(t)g(t)dt$$

ή

$$\int_0^a f(x)g(x)dx=\frac{1}{2}k\int_0^a f(x)dx$$

Αν $f(x)=\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}$ και $g(x)=x, x\in[0,\pi]$ τότε, επειδή ικανοποιούνται οι υποθέσεις $(\sin x=\sin(\pi-x),\ x+(\pi-x)=\pi)$ θα έχουμε:

$$\int_0^\pi x\cdot\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx=\frac{1}{2}\pi\int_0^\pi\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx=\frac{1}{2}\pi[-\mathrm{Artg}(\cos x)]_0^\pi$$

$$=\frac{1}{2}\pi\left[-\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{4}\right]=\frac{\pi^2}{4}$$

2. Να αποδείξετε ότι:

α) $$\int_0^{\pi/2}\sin^\nu x\,dx=\begin{cases}\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdots(\nu-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots\nu}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & \text{αν } \nu \text{ άρτιος}\\[2ex] \dfrac{2\cdot4\cdot6\cdots(\nu-1)}{1\cdot3\cdot5\cdots\nu}, & \text{αν } \nu \text{ περιττός}\end{cases}$$

β) $$\frac{\pi}{2}=\lim\left\{\frac{2\cdot4\cdot6\cdots(2\nu)}{1\cdot3\cdot5\cdots(2\nu-1)}\right\}^2\cdot\frac{1}{2\nu+1}$$ (Τύπος του Wallis)

Απόδειξη

α) Εφαρμόζοντας παραγοντική ολοκλήρωση έχουμε:

$$s_\nu=\int_0^{\pi/2}\sin^\nu x\,dx=-\sin^{\nu-1}x\cdot\cos x\Big|_0^{\pi/2}+(\nu-1)\int_0^{\pi/2}\sin^{\nu-2}x\cdot\cos^2 x\,dx$$

$$=(\nu-1)\int_0^{\pi/2}\sin^{\nu-2}x\,dx-(\nu-1)\int_0^{\pi/2}\sin^\nu x\,dx=(\nu-1)s_{\nu-2}-(\nu-1)s_\nu$$

δηλ.

$$s_\nu=\frac{\nu-1}{\nu}s_{\nu-2}$$

Συνεπώς

$$s_{2m}=\frac{2m-1}{2m}s_{2m-2}=\frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{2m-3}{2m-2}\cdots\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}dx$$

$$=\frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{2m-3}{2m-2}\cdots\frac{1}{2}\ \frac{\pi}{2} \qquad (1)$$

και

$$s_{2m+1}=\frac{2m}{2m+1}s_{2m-1}=\frac{2m}{2m+1}\cdot\frac{2m-2}{2m-1}\cdots\frac{2}{3}\int_0^{\pi/2}\sin x\,dx$$

$$=\frac{2m}{2m+1}\cdot\frac{2m-2}{2m-1}\cdots\frac{2}{3} \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) έχουμε το ζητούμενο.

β) Αφού $\sin^{\nu+1}x\le\sin^\nu x,\ \forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ η ακολουθία $s_\nu, \nu\in\mathbb{N}$ είναι φθίνουσα, από το Πόρισμα του Θεωρήματος 2.14. Τότε:

$$1=\frac{s_{2\nu}}{s_{2\nu}}\ge\frac{s_{2\nu+1}}{s_{2\nu}}\ge\frac{s_{2\nu+2}}{s_{2\nu}}=\frac{\frac{2\nu+1}{2\nu+2}\cdot\frac{2\nu-1}{2\nu}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}}{\frac{2\nu-1}{2\nu}\cdot\frac{2\nu-3}{2\nu-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{2\nu+1}{2\nu+2}=1-\frac{1}{2\nu+2},\ \forall\nu\in\mathbb{N}$$

Συνεπώς $\lim\frac{s_{2\nu+1}}{s_{2\nu}}=1$

ή

$$\lim\frac{\frac{2\nu}{2\nu+1}\cdot\frac{2\nu-2}{2\nu-1}\cdots\frac{2}{3}}{\frac{2\nu-1}{2\nu}\cdot\frac{2\nu-3}{2\nu-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}}=1$$

ή

$$\frac{\pi}{2}=\lim\left(\frac{2\cdot4\cdot6\cdots(2\nu)}{1\cdot3\cdot5\cdots(2\nu-1)}\right)^2\cdot\frac{1}{2\nu+1}$$

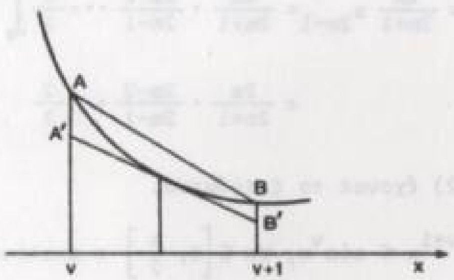
3. (Τύπος του Stirling). Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{\nu\to+\infty}\frac{\nu!}{\sqrt{2\pi\nu}\,\nu^\nu e^{-\nu}}=1,\ \nu\in\mathbb{N}$$

Απόδειξη

Θέτουμε $\alpha_\nu = \dfrac{\nu!}{\sqrt{\nu}\,\nu^\nu e^{-\nu}}$, $\nu \in \mathbb{N}$. Τότε $\dfrac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu+1}} = \dfrac{1}{e}\left(1+\dfrac{1}{\nu}\right)^{\nu+(1/2)}$ και

$$\log\frac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu+1}} = \left(\nu+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{\nu}\right)-1 \tag{1}$$



Σχήμα 2.7.

Η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $x>0$ είναι φθίνουσα και κοίλη. Άρα το εμβαδό που περικλείεται από το γράφημα της f, τον άξονα Ox και τις ευθείες $x=\nu$, $x=\nu+1$ περιέχεται μεταξύ των εμβαδών των τραπεζίων $\nu A'B'(\nu+1)$ και $\nu AB(\nu+1)$, όπου $A'B'$ είναι η εφαπτόμενη του γραφήματος της f στο σημείο με τετμημένη $x=\nu+\dfrac{1}{2}$. Άρα

$$\frac{1}{\nu+\frac{1}{2}} < \int_\nu^{\nu+1}\frac{dx}{x} < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\nu+1}\right)$$

Πολλαπλασιάζοντας τα μέλη αυτής της ανισότητας με $\nu+\dfrac{1}{2}$ και αφαιρώντας από όλα τα μέλη το 1 έχουμε:

$$0 < \left(\nu+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{\nu}\right)-1 < \frac{\left(\nu+\frac{1}{2}\right)^2}{\nu(\nu+1)}-1 = \frac{1}{4\nu(\nu+1)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\nu+1}\right)$$

Συνεπώς από την (1) έχουμε:

$$0 < \log\frac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu+1}} < \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\nu+1}\right)$$

δηλαδή

$$1 < \frac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu+1}} < e^{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\nu+1}\right)} \tag{2}$$

Θέτοντας $\nu+j$, $j=0,1,\ldots,(k-1)$ στην θέση του ν στην (2) και πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις ανισότητες που προκύπτουν έχουμε:

$$1 < \frac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu+k}} < e^{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\nu+k}\right)} \tag{3}$$

Η πρώτη ανισότητα της (2) δείχνει ότι η α_j, $j\in\mathbb{N}$ είναι φθίνουσα ακολουθία θετικών όρων, κάτω φραγμένη από το 0. Άρα θα συγκλίνει σε κάποιο $\ell \geqslant 0$. Παίρνοντας το όριο στην (3) όταν $k\to+\infty$ έχουμε ότι:

$$1 < \frac{\alpha_\nu}{\ell} \leqslant e^{\frac{1}{4\nu}} \tag{4}$$

Συνεπώς $\ell>0$. Για να βρούμε τώρα το ℓ χρησιμοποιούμε τον τύπο του Wallis (εφαρμογή 2β). Είναι

$$\sqrt{\pi} = \lim_{\nu\to+\infty}\frac{(\nu!)^2 2^{2\nu}}{(2\nu)!\sqrt{\nu}} = \lim_{\nu\to+\infty}\frac{\alpha_\nu^2}{\alpha_{2\nu}\sqrt{2}} = \frac{\ell}{\sqrt{2}}$$

Επομένως $\ell=\sqrt{2\pi}$. Τότε από τις (1) και (4) παίρνουμε τις ανισότητες:

$$\sqrt{2\pi\nu}\,\nu^\nu e^{-\nu} < \nu! < \sqrt{2\pi\nu}\,\nu^\nu\cdot e^{-\nu+\frac{1}{4\nu}}$$

Από αυτές το ζητούμενο είναι προφανές.

4. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση και $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $F(x)=\int_0^x f(t)dt$. Να αποδείξετε ότι:

α) Αν η f είναι περιττή, τότε η F είναι άρτια και αν η f είναι άρτια τότε η F είναι περιττή.

β) Αν η f είναι περιοδική με περίοδο T, κάτω από ποιές συνθήκες είναι και η F περιοδική με την ίδια περίοδο;

Απόδειξη

α) Έχουμε:

$$F(-x)=\int_0^{-x} f(t)dt$$

θέτουμε $t=-\omega$. Τότε $dt=-d\omega$ και επομένως:

$$F(-x)=-\int_0^{x} f(-\omega)d\omega=\begin{cases}\int_0^{x} f(\omega)d\omega=F(x), & \text{αν } f \text{ περιττή}\\ -\int_0^{x} f(\omega)d\omega=-F(x), & \text{αν } f \text{ άρτια}\end{cases}$$

β) Είναι

$$F(x+T)=\int_0^{x+T} f(t)dt=\int_0^{T} f(t)dt+\int_T^{x+T} f(t)dt$$

Στο τελευταίο ολοκλήρωμα θέτουμε $t=T+\omega$. Επειδή $f(x+T)=f(x)$, $\forall x\in IR$ θα έχουμε:

$$F(x+T)=\int_0^{T} f(t)dt+\int_0^{x} f(t)dt=\int_0^{T} f(t)dt+F(x)$$

Επομένως η F θα είναι περιοδική με περίοδο T, αν και μόνο αν,

$$\int_0^{T} f(x)dx=0$$

5.α) Αν η $f:[\alpha,\beta]\to IR$ έχει συνεχή και μη μηδενική παράγωγο f' στο $[\alpha,\beta]$, τότε, να αποδείξετε ότι:

$$\beta f(\beta)-\alpha f(\alpha)=\int_\alpha^{\beta} f(x)dx+\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(x)dx$$

β) Αν η f έχει συνεχή και θετική παράγωγο στο $[0,c]$ $(c>0)$ και $f(0)=0$ τότε να αποδείξετε ότι:

$$\alpha\beta\leq\int_0^{\alpha} f(x)dx+\int_0^{\beta} f^{-1}(x)dx$$

όπου $\alpha\in[0,c]$ και $\beta\in[0,f(c)]$. Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $f(\alpha)=\beta$ (Ανισότητα του Young)

γ) Έστω $r\in IR$, $r^2\neq r$ και $s=\frac{r}{r-1}$ έτσι ώστε: $\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1$. Αν $r>1$ και $A,B\in IR^{+}$ τότε να αποδείξετε ότι:

$$AB\leq\frac{A^r}{r}+\frac{B^s}{s}$$

Απόδειξη

α) Από την υπόθεση η f είναι γνήσια μονότονη στο $[\alpha,\beta]$ και έχει γνήσια μονότονη και παραγωγίσιμη αντίστροφη f^{-1} στο διάστημα με άκρα $f(\alpha)$ και $f(\beta)$. Από το Θεώρημα 2.22 (θεωρώντας σαν f την f^{-1} και φ την f) έχουμε:

$$\int_\alpha^{\beta} f^{-1}(f(x))f'(x)dx=\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(\varphi)d\varphi \tag{1}$$

Αλλά

$$\int_\alpha^{\beta} f^{-1}(f(x))f'(x)dx=\int_\alpha^{\beta} xf'(x)dx=xf(x)\Big|_\alpha^{\beta}-\int_\alpha^{\beta} f(x)dx$$

$$=\beta f(\beta)-\alpha f(\alpha)-\int_\alpha^{\beta} f(x)dx \tag{2}$$

Από τις (1) και (2) έχουμε το συμπέρασμα

β) Η f είναι γνήσια αύξουσα στο $[0,c]$ και $f(x)>0$, $\forall x\in(0,c]$, αφού για $0<x\leq c$ έχουμε $f(x)>f(0)=0$. Η f επίσης έχει συνεχή και γνήσια αύξουσα αντίστροφη που ορίζεται στο $[0,f(c)]$. Είναι $f^{-1}(x)>0$ αφού για $0<x\leq f(c)$ έχουμε $f^{-1}(0)=0<f^{-1}(x)$. Σύμφωνα λοιπόν με το α) θα έχουμε για $y\in[0,c]$

$$yf(y)=\int_0^{y} f(x)dx+\int_0^{f(y)} f^{-1}(x)dx \tag{3}$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι $\alpha\in[0,c]$ και $\beta\in[0,f(c)]$. Υπάρχουν τρεις περιπτώσεις που πρέπει να εξετάσουμε:

i) $0\leq f(\alpha)<\beta$ ii) $f(\alpha)=\beta$ iii) $0\leq\beta<f(\alpha)$

Στην περίπτωση i) παρατηρούμε ότι

$$\int_{f(\alpha)}^{\beta} f^{-1}(x)dx > \alpha(\beta-f(\alpha))$$

αφού για $x \geq f(\alpha) \Rightarrow f^{-1}(x) \geq f^{-1}(f(\alpha))=\alpha$

Εφαρμόζοντας την (3) με $y=\alpha$ παίρνουμε:

$$\int_0^{\alpha} f(x)dx+\int_0^{\beta} f^{-1}(x)dx=\int_0^{\alpha} f(x)dx+\int_0^{f(\alpha)} f^{-1}(x)dx+\int_{f(\alpha)}^{\beta} f^{-1}(x)dx$$

$$=\alpha f(\alpha)+\int_{f(\alpha)}^{\beta} f^{-1}(x)dx$$

$$> \alpha f(\alpha)+\alpha(\beta-f(\alpha))=\alpha\beta$$

Στην περίπτωση ii) από την (3) προκύπτει εύκολα ότι ισχύει η ισότητα.

Τέλος στην περίπτωση iii) αν $f(\alpha)>\beta \geq 0$ θα έχουμε

$\alpha>f^{-1}(\beta) \geq 0$ και $f(x) \geq f(f^{-1}(\beta))=\beta$ για $x \geq f^{-1}(\beta)$.

Άρα

$$\int_0^{\alpha} f(x)dx+\int_0^{\beta} f^{-1}(x)dx=\int_0^{f^{-1}(\beta)} f(x)dx+\int_{f^{-1}(\beta)}^{\alpha} f(x)dx+\int_0^{\beta} f^{-1}(x)dx$$

$$>\int_0^{f^{-1}(\beta)} f(x)dx+\alpha\beta-\beta f^{-1}(\beta)+\int_0^{\beta} f^{-1}(x)dx$$

(γιατί $\int_{f^{-1}(\beta)}^{\alpha} f(x)dx > f(f^{-1}(\beta))(\alpha-f^{-1}(\beta))=\beta(\alpha-f^{-1}(\beta))$). Με την βοήθεια της (3) με $y=f^{-1}(\beta)$ και $\beta=f(y)$ η τελευταία παράσταση ισούται με αβ.

γ) Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x)=x^{r-1}$, $x \geq 0$. Τότε $f^{-1}(x)=x^{1/(r-1)}$, $x \geq 0$ και από το β) έχουμε:

$$AB \leq \int_0^{A} x^{r-1}dx+\int_0^{B} x^{1/(r-1)}dx$$

$$=\frac{A^r}{r}+\frac{B^{r/(r-1)}}{r/(r-1)}=\frac{A^r}{r}+\frac{B^s}{s}$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $B=f(A)=A^{r-1}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

2.27. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2}dx$ β) $\int_2^4 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4}dx$

γ) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\cos x}$ δ) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}dx$

2.28. Επίσης τα ολοκληρώματα:

α) $\int_0^{\pi/2} e^{\alpha x}\sin 2x dx$ β) $\int_0^1 \frac{\mathrm{Arsin}x}{\sqrt{1+x}}dx$

γ) $\int_0^1 x\log(1+x^2)dx$ δ) $\int_1^{16} \mathrm{Artg}\sqrt{\sqrt{x}-1}dx$

2.29. α) Αν $I_\nu=\int_0^{\pi} e^{-x}\sin^{\nu}x dx$ τότε να αποδείξετε ότι:

$$(\nu^2+1)I_\nu=\nu(\nu-1)I_{\nu-2}$$

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-x}\cos^3 x dx$

2.30. Να αποδείξετε ότι:

α) Αν $I_\nu=\int_0^{\pi/2} x^{\nu}\sin x dx$ τότε: $I_\nu=\nu\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\nu-1}-\nu(\nu-1)I_{\nu-2}$

β) Αν $I_\nu=\int_0^{\alpha} (\alpha^2-x^2)^{\nu}dx$ τότε: $(2\nu+1)I_\nu=2\nu\alpha^2 I_{\nu-1}$

γ) Αν $I_\nu=\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{\nu}\cos\alpha x dx$ τότε: $\alpha^2 I_\nu=2\nu(2\nu-1)I_{\nu-1}-4\nu(\nu-1)I_{\nu-2}$

δ) Αν $I_\nu=\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2\nu+1)x}{\sin x}dx$ τότε: $I_\nu-I_{\nu-1}=0$

2.31. Να αποδείξετε ότι η αντικατάσταση $x=pt+q$, όπου p και q κατάλληλε σταθερές, μετασχηματίζει ένα οποιοδήποτε ολοκλήρωμα με πεπερασμένα άκρα α και β, σε άλλο με άκρα 0 και 1.

2.32. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^3 (x-2)^2dx$ θέτοντας $(x-2)^2=t$.

2.33. Με την αντικατάσταση $t=tg\frac{x}{2}$ έχουμε $I=\int_0^{2\pi}\frac{dx}{5-2\cos x}=0$. Να εξηγήσετε γιατί αυτό είναι λάθος, και να βρεθεί το λάθος.

2.34. Να μετασχηματιστεί το ολοκλήρωμα $\int_0^{2\pi} f(x)\cos x dx$ με την αντικατάσταση $\sin x=t$.

2.35. Αν $f(x)=\int_1^x \frac{1}{u}a^{u+\frac{1}{u}}du$, τότε να αποδείξετε ότι $f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)$

2.36. Αν $f(x)=\int_1^x \frac{dt}{t}$ τότε να αποδείξετε (χωρίς να χρησιμοποιήσετε ιδιότητες της λογαριθμικής συναρτήσεως) ότι:

α) $f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)$ β) $f(xy)=f(x)+f(y)$ γ) $f(x^y)=yf(x)$

2.37. α) Να αποδείξετε ότι: $\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx=\pi\int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_0^{\pi}\frac{x\sin^3x}{1+\cos^2x}dx$

2.38. α) Έστω $f:[-a,a]\to\mathbb{R}$ μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=\begin{cases}2\int_0^a f(x)dx, & \text{αν } f \text{ άρτια}\\ 0, & \text{αν } f \text{ περιττή}\end{cases}$$

β) Χωρίς να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα, να αποδείξετε ότι:

i) $\int_{-1/2}^{1/2}\cos x \log\frac{1+x}{1-x}dx=0$

ii) $\int_{-1}^{1}e^{\cos x}dx=2\int_0^1 e^{\cos x}dx$

2.39. Αν η συνάρτηση f είναι περιοδική με περίοδο T, να αποδείξετε ότι το ολοκλήρωμα $\int_a^{a+T} f(x)dx$ είναι ανεξάρτητο του a. Αν επί πλέον η f είναι και συνεχής, τότε να δόσετε μια άλλη απόδειξη στηριζόμενοι στο Θεώρημα 2.18.

2.40. Να αποδείξετε ότι:

α) $\int_a^{\beta} f(x)dx=\int_a^{\beta} f(a+\beta-x)dx$

β) $\int_0^{2a} f(x)dx=\int_0^{a}\{f(x)+f(2a-x)\}dx$

γ) $\int_{1/e}^{tgx}\frac{tdt}{1+t^2}+\int_{1/e}^{cotgx}\frac{dt}{t(1+t^2)}=1$

δ) $\int_0^{\sin^2x} Arsin\sqrt{t}dt+\int_0^{\cos^2x} Arcos\sqrt{t}dt=\frac{\pi}{4}$

2.41. Αν $f(x)=-f(2a-x)$ τότε να αποδείξετε ότι: $\int_{\beta}^{2a} f(x)dx=-\int_0^{\beta} f(x)dx$

2.42. Να λυθεί η εξίσωση: $\int_{\sqrt{2}}^{x}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=\frac{\pi}{12}$

2.43. Έστω $f(\nu)=\int_0^{\pi/4} tg^{\nu}x dx$. Να αποδείξετε ότι:

α) $f(\nu+1)<f(\nu)$ β) $f(\nu)+f(\nu-2)=\frac{1}{\nu-1}$, $\nu>2$

γ) $\frac{1}{\nu+1}<2f(\nu)<\frac{1}{\nu-1}$, $\nu>2$

§ 2.8. ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

Όπως στην περίπτωση της παραγώγου, έτσι και για το ολοκλήρωμα του Riemann, μπορούμε να πάρουμε μερικά πολύ χρήσιμα θεωρήματα, γνωστά ως θεωρήματα Μέσης Τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού, και τα οποία βασίζονται στις ενδιάμεσες τιμές της συναρτήσεως.

Θεώρημα 2.23 (Πρώτο Θεώρημα Μέσης Τιμής). Έστω f, g δυο συναρτήσεις, τέτοιες ώστε οι $f\cdot g$ και g να είναι ολοκληρώσιμες στο $[\alpha,\beta]$. Αν

α) $m \leqslant f(x) \leqslant M$, $\forall x \in [\alpha,\beta]$ και

β) η g είναι σταθερού προσήμου στο $[\alpha,\beta]$, δηλ. $g(x) \geqslant 0$ ή $g(x) \leqslant 0$, $\forall x \in [\alpha,\beta]$, τότε: υπάρχει $\eta \in [m,M]$ τέτοιο ώστε:

$$\int_\alpha^\beta f(x)g(x)dx = \eta\int_\alpha^\beta g(x)dx \tag{1}$$

Αν επί πλέον η f είναι και συνεχής, τότε υπάρχει $\xi \in [\alpha,\beta]$, τέτοιο ώστε:

$$\int_\alpha^\beta f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_\alpha^\beta g(x)dx \tag{2}$$

Απόδειξη

Ας εξετάσουμε μόνο την περίπτωση που είναι $g(x) \leqslant 0$, $\forall x \in [\alpha,\beta]$ μιας και η περίπτωση που είναι $g(x) \geqslant 0$ είναι ανάλογη. Επειδή $m \leqslant f(x) \leqslant M$, $\forall x \in [\alpha,\beta]$ θα έχουμε:

$$Mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant mg(x),\, x \in [\alpha,\beta]$$

Τότε, από την εφαρμογή 3α της § 2.5 θα είναι:

$$M\int_\alpha^\beta g(x)dx \leqslant \int_\alpha^\beta f(x)g(x)dx \leqslant m\int_\alpha^\beta g(x)dx \tag{3}$$

Αν τώρα $\int_\alpha^\beta g(x)dx = 0$, τότε από την (3) έχουμε ότι και

$$\int_\alpha^\beta f(x)g(x)dx = 0$$

οπότε η (1) ισχύει

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι $\int_\alpha^\beta g(x)dx < 0$. Τότε από την (3) θα έχουμε:

$$m \leqslant \frac{\int_\alpha^\beta f(x)g(x)dx}{\int_\alpha^\beta g(x)dx} \leqslant M$$

Συνεπώς, θέτοντας

$$\eta = \frac{\int_\alpha^\beta f(x)g(x)dx}{\int_\alpha^\beta g(x)dx}$$

προκύπτει ότι

$$\int_\alpha^\beta f(x)g(x)dx = \eta\int_\alpha^\beta g(x)dx$$

Αν τώρα η f είναι και συνεχής, τότε παίρνοντας ως $m=\min f$ και $M=\max f$, θα έχουμε ότι η f παίρνει όλες τις τιμές στο διάστημα $[\min f, \max f]$. Ειδικά θα παίρνει την τιμή η, δηλ. υπάρχει $\xi \in [\alpha,\beta]$, τέτοιο ώστε: $f(\xi)=\eta$. Άρα

$$\int_\alpha^\beta f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_\alpha^\beta g(x)dx \quad \blacksquare$$

Πόρισμα: Αν η $f:[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη και $m \leqslant f(x) \leqslant M$, $\forall x \in [\alpha,\beta]$ τότε υπάρχει $\eta \in [m,M]$ τέτοιο ώστε:

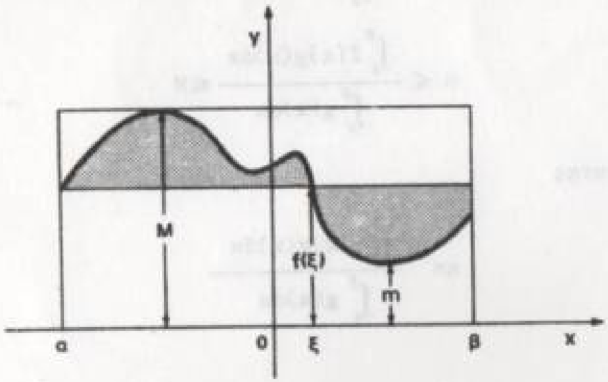
$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \eta(\beta-\alpha)$$

Αν επί πλέον η f είναι και συνεχής, τότε υπάρχει $\xi \in [\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = f(\xi)(\beta-\alpha)$$

Παρατήρηση 2.22.

Ο αριθμός η στο παραπάνω Πόρισμα λέγεται "μ έ σ η τ ι μ ή" της συναρτήσεως f. Στην περίπτωση που η f είναι συνεχής, το Πόρισμα δέχεται την παρακάτω γεωμετρική ερμηνεία:



Σχήμα 2.8.

Παράδειγμα 2.17.

Ας θεωρήσουμε το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^{\pi} (x+\pi)\sin x dx$$

θέτοντας $f(x)=x+\pi$ και $g(x)=\sin x, x\in[0,\pi]$ έχουμε ότι η f είναι συνεχής και η g σταθερού προσήμου, αφού $\sin x \geq 0$, $\forall x\in[0,\pi]$. Συνεπώς από το Θεώρημα 2.23 έχουμε ότι υπάρχει $\xi\in[0,\pi]$ τέτοιο ώστε:

$$\int_0^{\pi} (x+\pi)\sin x dx=(\xi+\pi)\int_0^{\pi} \sin x dx$$

Για να βρούμε ποιό είναι αυτό το ξ, αρκεί να υπολογίσουμε τα ολοκληρώματα και στα δυο μέλη της παραπάνω ισότητας. Έχουμε:

$$\int_0^{\pi} (x+\pi)\sin x dx=-\int_0^{\pi} (x+\pi)d\cos x=-(x+\pi)\cos x\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi} \cos x dx$$

$$=-(x+\pi)\cos x\Big|_0^{\pi}+\sin x\Big|_0^{\pi}=3\pi$$

$$\int_0^{\pi} \sin x dx=-\cos x\Big|_0^{\pi}=2$$

Συνεπώς: $3\pi=2(\xi+\pi) \Rightarrow \xi=\frac{\pi}{2}$

Θεώρημα 2.24 (Δεύτερο Θεώρημα Μέσης Τιμής). Έστω $f,g:[\alpha,\beta]\to \mathbb{R}$ δυο συναρτήσεις, για τις οποίες υποθέτουμε ότι:

α) η f είναι μονότονη στο $[\alpha,\beta]$ και

β) η g είναι ολοκληρώσιμη και σταθερού προσήμου στο $[\alpha,\beta]$. Τότε υπάρχει $\xi\in[\alpha,\beta]$, τέτοιο ώστε:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)dx=f(\alpha)\int_{\alpha}^{\xi} g(x)dx+f(\beta)\int_{\xi}^{\beta} g(x)dx$$

Απόδειξη

Θεωρούμε την συνάρτηση $F:[\alpha,\beta]\to \mathbb{R}$ με

$$F(z)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)dx-f(\alpha)\int_{\alpha}^{z} g(x)dx-f(\beta)\int_{z}^{\beta} g(x)dx \qquad (1)$$

Αφού η g είναι ολοκληρώσιμη, από το Θεώρημα 2.17 έχουμε ότι οι συναρτήσεις $\int_{\alpha}^{z} g(x)dx$ και $\int_{z}^{\beta} g(x)dx$ είναι συνεχείς. Άρα και η F είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$.

Ας εξετάσουμε μόνο την περίπτωση που η f είναι αύξουσα στο $[\alpha,\beta]$ και $g(x)\geq 0$, $\forall x\in[\alpha,\beta]$. Τότε

$$f(\alpha)\leq f(x)\leq f(\beta),\ \forall x\in[\alpha,\beta]$$

και

$$f(\alpha)g(x)\leq f(x)g(x)\leq f(\beta)g(x)$$

ή

$$f(\alpha)\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx\leq\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)dx\leq f(\beta)\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx \qquad (2)$$

Από την (1) με την βοήθεια της (2) παρατηρούμε ότι:

$$F(\alpha)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)dx-f(\beta)\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx\leq 0$$

$$F(\beta)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)dx-f(\alpha)\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx\geq 0$$

Δηλαδή $F(\alpha)\cdot F(\beta) \leq 0$. Συνεπώς έχουμε:

Αν $F(\alpha)=0$ τότε $\xi=\alpha$

Αν $F(\beta)=0$ τότε $\xi=\beta$

Αν $F(\alpha)F(\beta)<0$ τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$, από το θεώρημα του Bolzano του Απειροστικού Λογισμού 1, τέτοιο ώστε: $F(\xi)=0$. Αυτό αποδείχνει το θεώρημα. ■

Πόρισμα (θεώρημα του Bonnet). Έστω $g:[\alpha,\beta]\to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[\alpha,\beta]$ και σταθερού προσήμου. Τότε:

i) Αν η f είναι φθίνουσα και θετική, τότε υπάρχει $\xi_1 \in [\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε:

$$\int_\alpha^\beta f(x)g(x)dx=f(\alpha)\int_\alpha^{\xi_1} g(x)dx$$

ii) Αν η f είναι αύξουσα και θετική, τότε υπάρχει $\xi_2 \in [\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε:

$$\int_\alpha^\beta f(x)g(x)dx=f(\beta)\int_{\xi_2}^\beta g(x)dx$$

Παρατήρηση 2.23.

Άλλες μορφές του θεωρήματος 2.24 δίνονται στην εφαρμογή 3 παρακάτω

Παράδειγμα 2.18.

Ας θεωρήσουμε το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^\pi (2\pi-x)\sin x dx$$

Αν $f(x)=2\pi-x$, $g(x)=\sin x, x \in [0,\pi]$ τότε η f είναι φθίνουσα στο $[0,\pi]$ και η g σταθερού προσήμου, αφού $\sin x \geq 0, \forall x \in [0,\pi]$. Άρα από το θεώρημα 2.24 υπάρχει $\xi \in [0,\pi]$ τέτοιο ώστε:

$$\int_0^\pi (2\pi-x)\sin x dx=2\pi\int_0^\xi \sin x dx+\pi\int_\xi^\pi \sin x dx$$

Εύκολα βρίσκουμε, υπολογίζοντας τα ολοκληρώματα ότι $\xi=\frac{\pi}{2}$.

Επίσης από το Πόρισμα του Θεωρήματος 2.24 έχουμε ότι υπάρχει $\xi_1 \in [0,\pi]$ τέτοιο ώστε:

$$\int_0^\pi (2\pi-x)\sin x dx=2\pi\int_0^{\xi_1} \sin x dx$$

Εύκολα βρίσκουμε ότι $\xi_1=\frac{2\pi}{3}$

Παράδειγμα 2.19.

Το θεώρημα 2.24 εφαρμόζεται για να βρούμε άνω φράγματα για ολοκληρώματα που δεν υπολογίζονται. Ας βρούμε άνω φράγμα για το ολοκλήρωμα:

$$\int_\alpha^\beta \frac{\sin x}{x}dx, \ 0<\alpha<\beta \leq \pi$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα 2.24 με $f(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=\sin x, x \in [\alpha,\beta]$ έχουμε ότι υπάρχει $\xi \in [\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε:

$$\int_\alpha^\beta \frac{\sin x}{x}dx=\frac{1}{\alpha}\int_\alpha^\xi \sin x dx+\frac{1}{\beta}\int_\xi^\beta \sin x dx$$

Επειδή $\int_\alpha^\xi \sin x dx=\cos\alpha-\cos\xi$, $\int_\xi^\beta \sin x dx=\cos\xi-\cos\beta$ και $\left|\int_\alpha^\xi \sin x dx\right| \leq 2$, $\left|\int_\xi^\beta \sin x dx\right| \leq 2$ θα έχουμε:

$$\left|\int_\alpha^\beta \frac{\sin x}{x}dx\right| \leq \frac{2}{\beta}+\frac{2}{\alpha} \leq \frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\alpha}=\frac{4}{\alpha}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{\nu\to+\infty} \int_{1/(\nu+\alpha)}^{1/\nu} \frac{\sin(x^2)}{x^4}dx=\alpha, \ \alpha>0, \nu \in \mathbb{N}$$

Απόδειξη

Θέτουμε $f(x)=\frac{\sin(x^2)}{x^2}$ και $g(x)=\frac{1}{x^2}$, $x \in \left[\frac{1}{\nu+\alpha},\frac{1}{\nu}\right]$. Τότε οι f και g είναι συνεχείς και άρα ολοκληρώσιμες. Επί πλέον είναι $g(x)>0$, $\forall x \in \left[\frac{1}{\nu+\alpha},\frac{1}{\nu}\right]$. Τότε από το θεώρημα 2.23 (το πρώτο θεώρημα της Μέσης Τιμής) υπάρχει $\xi \in \left[\frac{1}{\nu+\alpha},\frac{1}{\nu}\right]$ τέτοιο ώστε:

$$\int_{1/(\nu+\alpha)}^{1/\nu} \frac{\sin(x^2)}{x^2}\cdot\frac{1}{x^2}\,dx=\frac{\sin(\xi^2)}{\xi^2}\int_{1/(\nu+\alpha)}^{1/\nu}\frac{1}{x^2}\,dx=\alpha\frac{\sin(\xi^2)}{\xi^2}$$

Επειδή $\frac{1}{\nu+\alpha}\leq\xi\leq\frac{1}{\nu}$, όταν $\nu\to+\infty$ το $\xi\to0$. Συνεπώς:

$$\lim_{\nu\to\infty}\int_{1/(\nu+\alpha)}^{1/\nu}\frac{\sin(x^2)}{x^4}\,dx=\alpha\cdot\lim_{\xi\to0}\frac{\sin(\xi^2)}{\xi^2}=\alpha$$

2. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\pi}{6}\leq\int_0^{1/2}[(1-x^2)(1-k^2x^2)]^{-(1/2)}dx\leq\frac{\pi}{6}\left(1-\frac{1}{4}k^2\right)^{-1/2}\ ,|k|<2$$

Απόδειξη

Θέτουμε $f(x)=(1-k^2x^2)^{-1/2}$, $g(x)=(1-x^2)^{-1/2}$, $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$. Τότε από το θεώρημα 2.23, υπάρχει $\xi\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$ τέτοιο ώστε:

$$\int_0^{1/2}(1-k^2x^2)^{-1/2}(1-x^2)^{-1/2}dx=(1-k^2\xi^2)^{-1/2}\int_0^{1/2}(1-x^2)^{-1/2}dx$$

$$=(1-k^2\xi^2)^{-1/2}\operatorname{Arsin}x\Big|_0^{1/2}$$

$$=\frac{\pi}{6}(1-k^2\xi^2)^{-1/2}$$

Αν $\varphi(\xi)=\frac{\pi}{6}(1-k^2\xi^2)^{-1/2}$ τότε $\varphi'(\xi)=\frac{\pi}{6}k^2\xi(1-k^2\xi^2)^{-3/2}\geq0$ δηλ. η φ είναι αύξουσα στο διάστημα $\left[0,\frac{1}{2}\right]$. Συνεπώς

$$\frac{\pi}{6}\leq\int_0^{1/2}(1-k^2\xi^2)^{-(1/2)}(1-x^2)^{-(1/2)}dx\leq\frac{\pi}{6}\left(1-\frac{1}{4}k^2\right)^{1/2}$$

Σημείωση

Το παραπάνω ολοκλήρωμα δεν υπολογίζεται στοιχειωδώς*, και λέγεται ε λ λ ε ι π τ ι κ ό ο λ ο κ λ ή ρ ω μ α. Με εφαρμογή του Θεωρήματος Μέσης Τιμής βρίσκουμε μια προσεγγιστική τιμή του. Σε τέτοια ακριβώς πρακτικά προβλήματα είναι μεγάλη η συμβολή των Θεωρημάτων Μέσης Τιμής.

---

* Δεν μπορεί να εκφραστεί με την βοήθεια στοιχειωδών συναρτήσεων. Βλέπε §1.9.

3. Έστω $f,g:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ δυο συναρτήσεις, για τις οποίες υποθέτουμε ότι:

α) η f είναι μονότονη, παραγωγίσιμη με την f' ολοκληρώσιμη στο $[\alpha,\beta]$

β) η g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$

Τότε υπάρχει $\xi\in[\alpha,\beta]$, τέτοιο ώστε:

$$\int_\alpha^\beta f(x)g(x)dx=f(\alpha)\int_\alpha^\xi g(x)dx+f(\beta)\int_\xi^\beta g(x)dx$$

Απόδειξη

Θέτουμε $G(x)=\int_\alpha^x g(t)dt$. Αφού η g είναι συνεχής, θα έχουμε $G'(x)=g(x)$, από το Πόρισμα του Θεωρήματος 2.18. Επίσης οι G' και f' είναι ολοκληρώσιμες. Άρα από το Θεώρημα 2.21 (Παραγοντική ολοκλήρωση) έχουμε:

$$\int_\alpha^\beta f(x)g(x)dx=\int_\alpha^\beta f(x)G'(x)dx=f(x)G(x)\Big|_\alpha^\beta-\int_\alpha^\beta f'(x)G(x)dx$$

$$=f(\beta)G(\beta)-f(\alpha)G(\alpha)-\int_\alpha^\beta f'(x)G(x)dx$$

$$=f(\beta)G(\beta)-\int_\alpha^\beta f'(x)G(x)dx,\ \text{αφού}\ G(\alpha)=0$$

Επειδή η f' είναι ολοκληρώσιμη και η f μονότονη, δηλ. η f' είναι σταθερού προσήμου, από το Θεώρημα 2.23 και το Πόρισμα του θεωρήματος 2.20 έχουμε:

$$\int_\alpha^\beta f'(x)G(x)dx=G(\xi)\int_\alpha^\beta f'(x)dx=G(\xi)\{f(\beta)-f(\alpha)\}$$

για κάποιο $\xi\in[\alpha,\beta]$. Άρα

$$\int_\alpha^\beta f(x)g(x)dx=f(\beta)G(\beta)-G(\xi)\{f(\beta)-f(\alpha)\}$$

$$=f(\beta)\{G(\beta)-G(\xi)\}+f(\alpha)G(\xi)$$

$$=f(\alpha)\int_\alpha^\xi g(x)dx+f(\beta)\int_\xi^\beta g(x)dx$$

Σημείωση

Το παραπάνω θεώρημα είναι μια ασθενέστερη μορφή του θεωρήματος 2.24. (Βλέπε και Παρατήρηση 2.23). Η απόδειξη δεν μπορεί να γίνει όπως στο θεώρημα 2.24, αφού η g δεν είναι σταθερού προσήμου. Αν συνδιάσουμε το θεώρημα 2.24 και την παραπάνω εφαρμογή παίρνουμε μια ακόμα μορφή για το Δεύτερο Θεώρημα της Μέσης Τιμής:

Αν $f,g:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις, τέτοιες ώστε η g να είναι σταθερού προσήμου στο $[\alpha,\beta]$ και $m\leqslant f(x)\leqslant M$, $\forall x\in[\alpha,\beta]$ τότε υπάρχει $\xi\in[\alpha,\beta]$, τέτοιο ώστε:

$$\int_\alpha^\beta f(x)g(x)dx=m\int_\alpha^\xi g(x)dx+M\int_\xi^\beta g(x)dx$$

Η απόδειξη είναι παρόμοια με αυτή του θεωρήματος 2.24 και αφήνεται για άσκηση. Επίσης το θεώρημα μπορεί να αποδειχτεί και πιο γενικά με την f μονότονη και την g ολοκληρώσιμη στο $[\alpha,\beta]$. Η απόδειξη παραλείπεται.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

2.44. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν αριθμοί $\xi_1,\xi_2\in[0,1]$ τέτοιοι ώστε:

$$\int_0^1\frac{\sin\pi x}{x^2+1}dx=\frac{2}{\pi(\xi_1^2+1)}=\frac{\pi}{4}\sin\pi\xi_2$$

2.45. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής, τότε να αποδείξετε ότι:

α) $\lim\limits_{v\to+\infty}\int_{1/(v+\alpha)^2}^{1/v^2}\frac{f(x)}{x^{3/2}}dx=2\alpha f(0)$, $0<\alpha$

β) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_0^{\sqrt{\alpha}}\frac{\alpha f(x)}{\alpha^2+x^2}dx=\frac{1}{2}\pi f(0)$, $0<\alpha$

2.46. Να αποδείξετε ότι: $\int_0^x\frac{dt}{1+t}=\frac{x}{1+x\theta(x)}$, $x>-1$ όπου $0<\theta(x)<1$. Στη συνέχεια να υπολογίσετε το $\theta(x)$ και να αποδείξετε ότι: $\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=\frac{1}{2}$

2.47. Να εξετάσετε αν εφαρμόζεται το Θεώρημα 2.24 στην περίπτωση που $f(x)=\cos x$, $g(x)=x^2$, $\alpha=-\frac{\pi}{2}$, $\beta=\frac{\pi}{2}$

2.48. Δίνεται η συνάρτηση $f_{\alpha,\beta}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f_{\alpha,\beta}(x)=e^{-\alpha x}\sin^2\beta x$, $\alpha>0$.

α) Να υπολογίσετε το αόριστο ολοκλήρωμα της f.

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\eta\in\left[e^{-1/2},e^4\right]$ τέτοιο ώστε:

$$\int_0^2 e^{2x^2}f_{2,\pi}(x)dx=\eta.$$

2.49. α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,\pi)$ τέτοιο ώστε:

$$\int_0^\pi(x+\pi)\sin x\,dx=2\pi\int_\xi^\pi\sin x\,dx$$

β) Στη συνέχεια να βρεθεί αυτό το ξ.

§ 2.9. ΤΥΠΟΣ ΤΟΥ TAYLOR ΜΕ ΥΠΟΛΟΙΠΟ ΣΕ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΗ ΜΟΡΦΗ

Στον Διαφορικό Λογισμό είδαμε τον τύπο του Taylor, ο οποίος δίνει την τιμή μιας συναρτήσεως σε κάποιο σημείο, συναρτήσει των τιμών της f και των παραγώγων της μέχρι $v-1$ τάξη σε κάποιο άλλο σημείο και ενός όρου, του υπόλοιπου, που περιέχει την $f^{(v)}$ υπολογισμένη σε κάποιο ενδιάμεσο σημείο από τα δοσμένα. Σε πολλές εφαρμογές είναι πολύ χρήσιμο να έχουμε μια έκφραση του υπόλοιπου υπό μορφή ολοκληρώματος. Έτσι έχουμε το ακόλουθο

Θεώρημα 2.25. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f έχει παραγώγους τάξης $\leqslant v$, οι οποίες είναι όλες συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$. Τότε για $\alpha\leqslant x,x_0\leqslant\beta$ έχουμε:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{(x-x_0)}{1!}f'(x_0)+\cdots+\frac{(x-x_0)^{v-1}}{(v-1)!}f^{(v-1)}(x_0)+R_v$$

όπου

$$R_v=\frac{1}{(v-1)!}\int_{x_0}^x(x-t)^{v-1}f^{(v)}(t)dt$$

Απόδειξη

Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή. Για $v=1$ έχουμε:

$$R_1=\int_{x_0}^{x} f'(t)dt=f(x)-f(x_0)$$

από το Πόρισμα του θεωρήματος 2.20. Άρα ο τύπος ισχύει για ν=1. Υποθέτοντας ότι ισχύει για ν έχουμε, ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες, ότι:

$$R_\nu=\frac{1}{(\nu-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{\nu-1}f^{(\nu)}(t)dt=-\frac{1}{\nu!}\int_{x_0}^{x}f^{(\nu)}(t)d\{(x-t)^\nu\}$$

$$=-\frac{1}{\nu!}f^{(\nu)}(t)(x-t)^\nu\Big|_{x_0}^{x}+\frac{1}{\nu!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^\nu f^{(\nu+1)}(t)dt$$

$$=\frac{(x-x_0)^\nu}{\nu!}f^{(\nu)}(x_0)+R_{\nu+1}$$

δηλ. ισχύει και για ν+1 και επομένως ισχύει $\forall\nu\in\mathbb{N}$. ■

Παρατήρηση 2.24.

Μια πιο απλή μορφή του R_ν, προκύπτει αν θέσουμε:

$$t=(1-s)x_0+sx, s\in[0,1]$$

οπότε:

$$R_\nu=\frac{(x-x_0)^\nu}{(\nu-1)!}\int_0^1(1-s)^{\nu-1}f^{(\nu)}\{(1-s)x_0+sx\}ds$$

Παρατήρηση 2.25.

Αν $x_0=0$ τότε έχουμε τον τύπο του Mac-Laurin. Στην περίπτωση αυτή το R_ν δίνεται από τον τύπο:

$$R_\nu=\frac{x^\nu}{(\nu-1)!}\int_0^1(1-s)^{\nu-1}f^{(\nu)}(sx)ds$$

Παράδειγμα 2.20.

Ας αναπτύξουμε σε σειρά κατά Mac-Laurin την συνάρτηση f(x)=log(1 + x), $x\in(-1,1)$.

Έχουμε: $f^{(\nu)}(x)=(-1)^{\nu-1}\dfrac{(\nu-1)!}{(1+x)^\nu}$ και $f^{(\nu)}(0)=(-1)^{\nu-1}\cdot(\nu-1)!$

Συνεπώς:

$$\log(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots(-1)^\nu\frac{x^{\nu-1}}{\nu-1}+R_\nu$$

όπου

$$R_\nu=(-1)^{\nu-1}x^\nu\int_0^1\frac{(1-s)^{\nu-1}}{(1+sx)^\nu}ds$$

(Βλέπε Παρατήρηση 2.25). Θα αποδείξουμε τώρα ότι $R_\nu\to 0$.

Θέτουμε: $\omega=\dfrac{1-s}{1+sx}$. Τότε $d\omega=-\dfrac{(1+x)}{(1+sx)^2}ds$ και επομένως

$$R_\nu=(-1)^{\nu-1}x^\nu\int_0^1\left(\frac{1-s}{1+sx}\right)^{\nu-1}\frac{1}{(1+sx)}ds=(-1)^{\nu-1}x^\nu\int_0^1\frac{\omega^{\nu-1}}{1+\omega x}d\omega$$

Αν $x>0$, τότε

$$|R_\nu|<x^\nu\int_0^1\omega^{\nu-1}d\omega=\frac{x^\nu}{\nu}$$

Αν $x<0$, θέτουμε $x=-x_1$, οπότε $0<x_1<1$ και

$$|R_\nu|<x_1^\nu\int_0^1\frac{\omega^{\nu-1}}{1-x_1}d\omega=\frac{x_1^\nu}{\nu(1-x_1)}$$

Επομένως $\forall x\in(-1,1)$ έχουμε ότι $R_\nu\to 0$ και άρα

$$\log(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots(-1)^\nu\frac{x^{\nu-1}}{\nu-1}+\cdots$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Με τις υποθέσεις του θεωρήματος 2.25 να βρήτε τις γνωστές εκφράσεις του υπόλοιπου του τύπου του Taylor, κατά Lagrange και κατά Cauchy.

Απόδειξη

Από το θεώρημα 2.23 έχουμε ότι:

$$\int_{x_0}^{x}F(t)G(t)dt=F(\xi)\int_{x_0}^{x}G(t)dt$$

για κάποιο ξ μεταξύ x_0 και x.

α) θέτουμε:

$$F(t)=f^{(\nu)}(t) \quad \text{και} \quad G(t)=\frac{(x-t)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}$$

Τότε:

$$R_\nu=\frac{1}{(\nu-1)!}\int_{x_0}^{x} f^{(\nu)}(t)\cdot(x-t)^{\nu-1}dt=\frac{f^{(\nu)}(\xi)}{(\nu-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{\nu-1}dt$$

$$=\frac{f^{(\nu)}(\xi)}{(\nu-1)!}\left[-\frac{(x-t)^{\nu}}{\nu}\right]_{x_0}^{x}=\frac{(x-x_0)^{\nu}}{\nu!}f^{(\nu)}(\xi)$$

δηλ. η μορφή του υπόλοιπου κατά Lagrange.

β) θέτοντας τώρα

$$F(t)=\frac{(x-t)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}f^{(\nu)}(t) \quad \text{και} \quad G(t)=1$$

έχουμε:

$$R_\nu=\frac{1}{(\nu-1)!}\int_{x_0}^{x} f^{(\nu)}(t)(x-t)^{\nu-1}dt=\frac{(x-\xi)^{\nu-1}f^{(\nu)}(\xi)}{(\nu-1)!}\int_{x_0}^{x}1\cdot dt$$

$$=\frac{(x-x_0)(x-\xi)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}f^{(\nu)}(\xi)$$

δηλ. η μορφή του υπόλοιπου κατά Cauchy.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

2.50. Να γράψετε τον τύπο του Mac-Laurin με υπόλοιπο σε ολοκληρωτική μορφή για την συνάρτηση $f(x)=\sin x, x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε επίσης ότι:

$$|R_\nu|\leqslant\frac{|x|^{\nu}}{\nu!},\ x\in\mathbb{R}$$

2.51. Έστω $f_0(x), x\geqslant 0$ μια συνεχής συνάρτηση με $f_0(x)>0,\ \forall x\geqslant 0$. Αν $f_\nu(x)=\int_0^x f_{\nu-1}(t)dt, \nu\in\mathbb{N},\ x\geqslant 0$, να αποδείξετε ότι:

α) $\dfrac{f_\nu(x)}{x^{\nu}}>\dfrac{f_{\nu+1}(x)}{x^{\nu+1}},\ \forall\nu\in\mathbb{N}$ και $x>0$

β) $f_\nu(x)=\dfrac{1}{(\nu-1)!}\int_0^x (x-t)^{\nu-1}f_0(t)dt,\ \forall\nu\geqslant 1$ και $x\geqslant 0$

§ 2.10. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ ΟΡΙΣΜΕΝΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

Σ' αυτή την παράγραφο θα αναφέρουμε μερικές από τις εφαρμογές του ορισμένου ολοκληρώματος.

α) Εμβαδό επίπεδου χωρίου

Έστω f μια μη αρνητική, συνεχής συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα [α,β] και συμβολίζουμε με $\mathcal{E}$ το σύνολο των σημείων (x,y) για τα οποία:

$$0\leqslant y\leqslant f(x) \quad \text{και} \quad \alpha\leqslant x\leqslant\beta$$

δηλ. το $\mathcal{E}$ είναι το επίπεδο χωρίο που περικλείεται από τις ευθείες x=α, x=β, τον άξονα Ox(y=0) και την καμπύλη με εξίσωση y=f(x).

Όπως έχουμε δει στην § 2.2, παριστάνοντας γραφικά τα άνω και κάτω αθροίσματα, αυτά προσεγγίζουν το εμβαδό που περικλείεται από την καμπύλη. Έτσι το εμβαδό του $\mathcal{E}$ ορίζουμε να είναι

$$E=\int_\alpha^\beta f(x)dx \qquad (1)$$

Για να τσεκάρουμε αν πραγματικά ο ορισμός είναι σωστός, ας βρούμε το εμβαδό ενός ορθογωνίου με πλευρές παράλληλες προς τους άξονες. Θέτουμε $f(x)=h>0$ στο διάστημα $\alpha\leqslant x\leqslant\beta$. Τότε το $\mathcal{E}$ είναι το ορθογώνιο με βάση β-α και ύψος h και

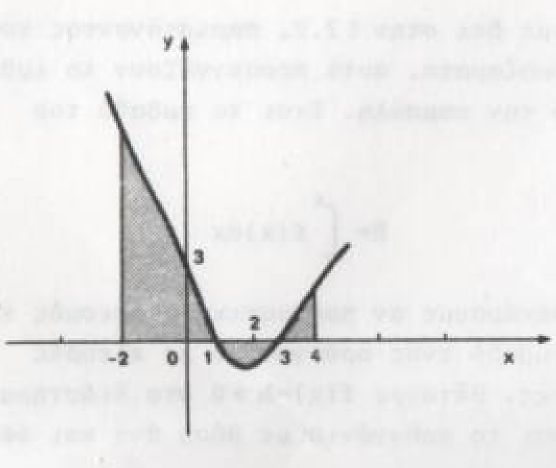
$$A=\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_\alpha^\beta h\,dx=(\beta-\alpha)h$$

Ο ορισμός του εμβαδού εφαρμόζεται για οποιαδήποτε συνάρτηση f που είναι μη αρνητική και ολοκληρώσιμη στο διάστημα που θεωρούμε. Ειδικά, η f δεν χρειάζεται να είναι συνεχής. Εν τούτοις επειδή οι εφαρμογές αναφέρονται σε συνεχείς συναρτήσεις, γι' αυτό συνήθως υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής. Ο περιορισμός ότι η f είναι μη αρνητική, δεν είναι ουσιαστικός. Αν για την f ισχύει $f(x)\leqslant 0,\ \alpha\leqslant x\leqslant\beta$ τότε επειδή τα χωρία $\{\alpha \le x \le \beta,\ f(x) \le y \le 0\}$ και $\{\alpha \le x \le \beta,\ 0 \le y \le -f(x)\}$ έχουν το ίδιο εμβαδό, αρκεί να εργαστούμε με την συνάρτηση $-f$ που είναι θετική. Στην γενική περίπτωση που η f δεν έχει σταθερό πρόσημο στο $[\alpha,\beta]$, τότε χωρίζουμε το $[\alpha,\beta]$ σε υποδιαστήματα στα οποία η f έχει σταθερό πρόσημο και υπολογίζουμε τα αντίστοιχα εμβαδά. Τότε θα είναι:

$$E=\int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|dx \qquad (2)$$

Παράδειγμα 2.21.

Ας βρούμε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη με εξίσωση $f(x)=x^2-4x+3$, τον άξονα Ox και τις ευθείες $x=-2$ και $x=4$. (Σχήμα 2.9).

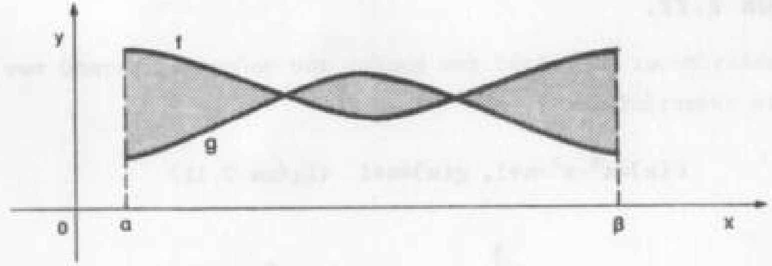


Σχήμα 2.9.

Επειδή $f(x) \ge 0$, αν $x \in [-2,1] \cup [3,4]$ και $f(x) \le 0$ αν $x \in [1,3]$ θα έχουμε:

$$E=\int_{-2}^{4} |x^2-4x+3|dx=\int_{-2}^{1}(x^2-4x+3)dx-\int_{1}^{3}(x^2-4x+3)dx+\int_{3}^{4}(x^2-4x+3)dx=18$$

Έστω τώρα δυο συναρτήσεις f και g συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$. θα υπολογίσουμε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f,g και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$.



Σχήμα 2.10.

Το εμβαδό που ζητάμε είναι το εμβαδό του μαυρισμένου χωρίου στο σχήμα 2.10. Αυτό είναι η διαφορά των εμβαδών E_1 και E_2, όπου E_1 είναι το εμβαδό που περιέχεται μεταξύ της καμπύλης $\max\{f(x),g(x)\}, x \in [\alpha,\beta]$ του άξονα Ox και των ευθειών $x=\alpha$ και $x=\beta$ και E_2 είναι το εμβαδό που περιέχεται μεταξύ της καμπύλης $\min\{f(x),g(x)\}, x \in [\alpha,\beta]$ του άξονα Ox και των ευθειών $x=\alpha$ και $x=\beta$. Δηλαδή

$$E=E_1-E_2=\int_{\alpha}^{\beta}\max\{f(x),g(x)\}dx-\int_{\alpha}^{\beta}\min\{f(x),g(x)\}dx$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}[\max\{f(x),g(x)\}-\min\{f(x),g(x)\}]dx$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}|f(x)-g(x)|dx$$

Έτσι

Αν f,g είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha,\beta]$ τότε το εμβαδό του χωρίου που βρίσκεται μεταξύ των γραφημάτων των f και g και των ευθειών $x=\alpha$ και $x=\beta$, δίνεται από τον τύπο:

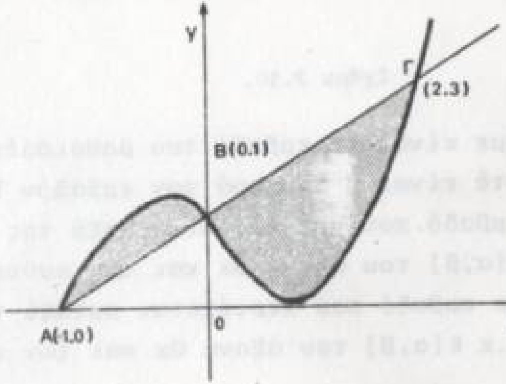
$$E=\int_{\alpha}^{\beta}|f(x)-g(x)|dx \qquad (3)$$

Παρατηρούμε ότι αν $g=0$ τότε έχουμε τον τύπο (2). Σε ορισμένες περιπτώσεις τα όρια ολοκληρώσεως εκφυλίζονται στα σημεία τομής των δυο καμπύλων. Σε μια τέτοια περίπτωση αυτά υπολογίζονται λύνοντας την εξίσωση $f(x)=g(x)$.

Παράδειγμα 2.22.

Θα υπολογίσουμε το εμβαδό του χωρίου που βρίσκεται μεταξύ των γραφημάτων των συναρτήσεων:

$$f(x)=x^3-x^2-x+1,\ g(x)=x+1 \quad (\Sigma\chi\acute{\eta}\mu\alpha\ 2.11)$$



Σχήμα 2.11.

Βρίσκουμε τα σημεία τομής, λύνοντας την εξίσωση f(x)=g(x), δηλ.:

$$x^3-x^2-x+1=x+1$$

Είναι A(-1,0), B(0,1) και Γ(2,3). Από το σχήμα 2.11 έχουμε ότι: $g(x)\leqslant f(x)$ αν $-1\leqslant x\leqslant 0$ και $f(x)\leqslant g(x)$ αν $0\leqslant x\leqslant 2$. Άρα:

$$E=\int_{-1}^{2}|f(x)-g(x)|dx=\int_{-1}^{0}[(x^3-x^2-x+1)-(x+1)]dx+$$
$$+\int_{0}^{2}[(x+1)-(x^3-x^2-x+1)]dx=\frac{37}{12}$$

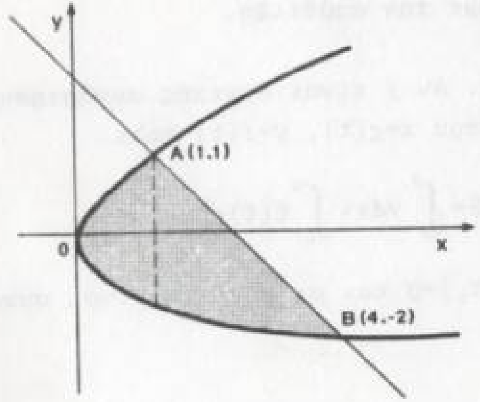
Παρατήρηση 2.25.

Σε πολλές περιπτώσεις ο ρόλος των x και y μπορεί να αλλάζει. Έτσι αν f(y) και g(y) είναι δυο συνεχείς συναρτήσεις του y στο διάστημα [γ,δ], τότε το εμβαδό του χωρίου που βρίσκεται μεταξύ των γραφημάτων των f,g, του άξονα Oy και των ευθειών y=γ και y=δ, δίνεται από τον τύπο:

$$E=\int_{\gamma}^{\delta}|f(y)-g(y)|dy$$

Παράδειγμα 2.23.

Ας βρούμε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την παραβολή $y^2=x$ και την ευθεία x+y=2. (Σχήμα 2.12).



Σχήμα 2.12.

Στο διάστημα $0\leqslant x\leqslant 1$ έχουμε ως άνω και κάτω καμπύλη την παραβολή ενώ στο διάστημα $1\leqslant x\leqslant 4$ έχουμε άνω καμπύλη την ευθεία και κάτω την παραβολή. Άρα

$$E=\int_0^1[\sqrt{x}-(-\sqrt{x})]dx+\int_1^4[(2-x)-(-\sqrt{x})]dx=\frac{9}{2}$$

Μπορούμε όμως να ολοκληρώσουμε ως προς y, οπότε:

$$E=\int_{-2}^{1}[(2-y)-y^2]dy=\frac{9}{2}$$

α_1) Εμβαδό χωρίου που η συνάρτηση δίνεται σε παραμετρική μορφή

Ας θεωρήσουμε τις εξισώσεις: $x=g(t)$, $y=f(t)$ $t\in[t_1,t_2]$. Τέτοιες εξισώσεις δεν ορίζουν πάντα το y σαν συνάρτηση του x. Μια συγκεκριμμένη τιμή του x μπορεί να αντιστοιχεί σε περισσότερες τιμές του t και οι τιμές αυτές μπορεί να οδηγούν σε διαφορετικές τιμές του y. Για παράδειγμα αν x=cost, y=sint, τότε κάθε $x\in(-1,1)$ ορίζει δυο τιμές του y, $y=\pm\sqrt{1-x^2}$. Αποδεικνύεται ότι αν $g'(t)\neq 0$ $\forall t\in(t_1,t_2)$ (οπότε η x=g(t) είναι αμφιμονοσήμαντη και υπάρχει η αντίστροφή της) τότε οι εξισώσεις $x=g(t)$, $y=f(t)$ ορίζουν το y σαν συνάρτηση του x.

Σε τέτοιες περιπτώσεις μπορούμε να υπολογίσουμε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από συναρτήσεις που δίνονται σε παραμετρική μορφή, σύμφωνα με το επόμενο θεώρημα, του οποίου παραλείπουμε την απόδειξη.

Θεώρημα 2.26. Αν y είναι συνεχής συνάρτηση του x στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, όπου $x=g(t)$, $y=f(t)$ τότε

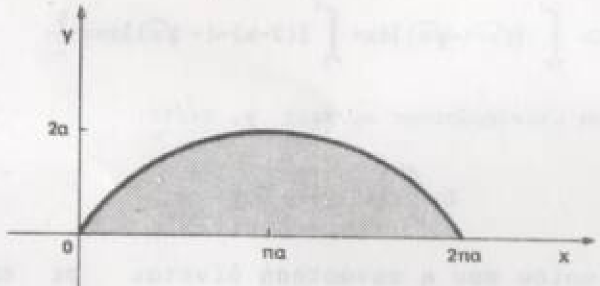
$$E=\int_{\alpha}^{\beta} y\,dx=\int_{t_1}^{t_2} f(t)g'(t)\,dt$$

αρκεί $g(t_1)=\alpha$, $g(t_2)=\beta$ και οι g', f να είναι συνεχείς στο $[t_1,t_2]$.

Παράδειγμα 2.24.

Θα βρούμε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τον άξονα Ox και ένα τόξο της κυκλοειδούς:

$$x=\alpha(t-\sin t),\ y=\alpha(1-\cos t) \quad (\text{Σχήμα } 2.13)$$



Σχήμα 2.13.

Επειδή $x'(t)\neq 0$, $\forall t\in(0,2\pi)$ ορίζεται συνάρτηση $y=f(x)$. Τότε θα είναι:

$$E=\int_{t_1}^{t_2} y\,dx$$

όπου $x(t_1)=0$, $x(t_2)=2\pi\alpha$ ή $t_1=0$, $t_2=2\pi$.

Επομένως:

$$E=\int_0^{2\pi}\alpha(1-\cos t)\cdot\alpha\cdot(1-\cos t)\,dt=\alpha^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)\,dt$$

$$=\alpha^2\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos t+\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt=\frac{\alpha^2}{2}\int_0^{2\pi}(3-4\cos t+\cos 2t)\,dt$$

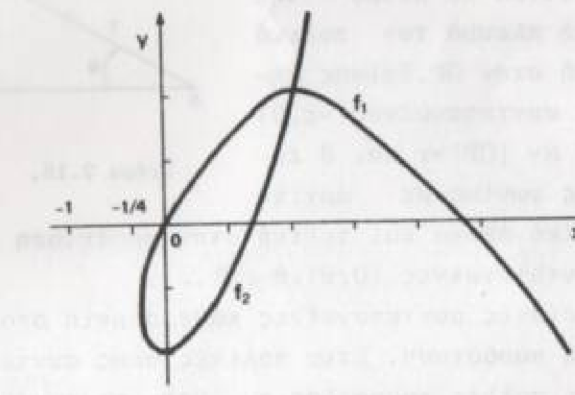
$$=\frac{\alpha^2}{2}\left[3t-4\sin t+\frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{2\pi}=3\pi\alpha^2$$

Παράδειγμα 2.25.

Ας βρούμε τώρα το εμβαδό που περικλείεται από την καμπύλη: $x=t^2-t$, $y=t^3-3t$, $-1\leq t\leq 2$

Θα κάνουμε πρώτα τη γραφική παράσταση. Θα δώσουμε μόνο τον πίνακα μεταβολών, αφήνοντας τις λεπτομέρειες για άσκηση.

t	-2	-1	0	1/2	1	2
x	6	2	0	-1/4	0	2
x'	−	−	−	0	+	+
y	-2	2	0	-11/8	-2	2
y'	+	0	−	−	0	+



Σχήμα 2.14

Παρατηρούμε ότι εδώ έχουμε δυο διαστήματα $I_1: t \leqslant \frac{1}{2}$ και $I_2: t \geqslant \frac{1}{2}$ στα οποία το x είναι αντίστοιχα φθίνουσα και αύξουσα. Συνεπώς θα έχουμε:

$$-1 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}, \quad x(-1)=2 \quad , \quad x\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4} \quad \text{για την } f_1$$

$$\frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 2 , \quad x\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}, \quad x(2)=2 \quad \text{για την } f_2$$

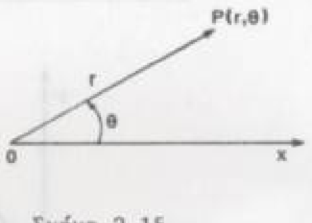
Άρα

$$E=\int_{-1/4}^{2} f_1(x)dx-\int_{-1/4}^{2} f_2(x)dx=\int_{1/2}^{-1} (t^3-3t)(2t-1)dt-\int_{1/2}^{2} (t^3-3t)(2t-1)dt$$

$$=\int_{2}^{-1} (2t^4-t^3-6t^2+3t)dt=\frac{81}{20}$$

α_2) Εμβαδό χωρίου σε πολικές συντεταγμένες

Όπως ξέρουμε, ένα σημείο στο επίπεδο παριστάνεται από ένα διατεταγμένο ζεύγος (x,y) καρτεσιανών συντεταγμένων, οι οποίες μετράνε την απόσταση του σημείου από τους άξονες Oy και Ox αντίστοιχα. Ένας άλλος τρόπος παράστασης σημείων στο επίπεδο είναι με **πολικές συντεταγμένες**. Στο σύστημα αυτό διαλέγουμε ένα σταθερό σημείο O, τον **πόλο** και μια ημιευθεία με αρχή το O, τον **πολικό άξονα**. Κάθε σημείο στο επίπεδο μπορεί να θεωρηθεί ότι έχει συντεταγμένες (r,θ) όπου r είναι το μήκος του τμήματος OP και θ είναι το μέτρο της γωνίας με αρχική πλευρά τον πολικό άξονα και τελική στην OP. Επίσης χρησιμοποιούμε τις συντεταγμένες (-r,θ) για το σημείο P αν |OP|=r και θ είναι το μέτρο της γωνίας με αρχική πλευρά στον πολικό άξονα και τελική στην προέκταση της OP. O πόλος έχει συντεταγμένες (0,θ), θ ∈ ℝ.



Σχήμα 2.15.

Στις καρτεσιανές συντεταγμένες κάθε σημείο στο επίπεδο έχει μονοσήμαντη παράσταση. Στις πολικές όμως συντεταγμένες κάθε σημείο έχει πολλές παραστάσεις. Έτσι το σημείο (r,θ) μπορεί να παρασταθεί επίσης από τα (r,θ±2kπ) ή (-r,θ±(2k+1)π), k ∈ ℤ. Όμως αν το P δεν είναι ο πόλος, τότε το P έχει μονοσήμαντη παράσταση αν r >0 και 0 ⩽ θ < 2π. Έτσι λοιπόν έχουμε ότι **κάθε ζεύγος αριθμών (r,θ) ορίζει ένα μοναδικό σημείο P τέτοιο ώστε |OP|=|r| και θ είναι το μέτρο της γωνίας που έχει αρχική πλευρά τον πολικό άξονα και τελική την OP αν r >0 και την προέκταση της OP ως προς τον πόλο αν r <0.**

Η σχέση καρτεσιανών και πολικών συντεταγμένων δίνεται από τις εξισώσεις:

$$tg\theta=\frac{y}{x}, \quad r^2=x^2+y^2, \quad x=r\cos\theta, \quad y=r\sin\theta$$

Έτσι το γράφημα της εξίσωσης r=f(θ) σε πολικές συντεταγμένες είναι το ίδιο με το γράφημα των παραμετρικών εξισώσεων (με παράμετρο θ)

$$x=f(\theta)\cos\theta, \quad y=f(\theta)\sin\theta$$

σε καρτεσιανές συντεταγμένες. Αντίστροφα, το γράφημα μιας δοσμένης εξίσωσης ως προς x και y είναι το ίδιο με το γράφημα της εξίσωσης ως προς r και θ που παίρνεται αντικαθιστώντας τα x και y με rcosθ και rsinθ αντίστοιχα.

Για να κάνουμε το γράφημα της καμπύλης r=f(θ) χρησιμοποιούμε την περιοδικότητα, την συμμετρία, την μέγιστη και ελάχιστη τιμή του r και τις εφαπτόμενες στον πόλο.

Το γράφημα της r=f(θ) είναι συμμετρικό ως προς:

α) τον πόλο αν αντικαθιστώντας όπου (r,θ) το (-r,θ) ή (r,π+θ) η εξίσωση δεν μεταβάλλεται.

β) τον πολικό άξονα αν αντικαθιστώντας όπου (r,θ) το (r,-θ) ή (-r,π-θ) η εξίσωση δεν μεταβάλλεται

γ) την ευθεία $\theta=\frac{\pi}{2}$ αν αντικαθιστώντας όπου (r,θ) το (r,π-θ) ή (-r,-θ) η εξίσωση δεν μεταβάλλεται.

Ειδικά αν το r είναι συνάρτηση του sinθ τότε η καμπύλη είναι συμμετρική ως προς την ευθεία $\theta=\frac{\pi}{2}$, ενώ αν είναι συνάρτηση του cosθ είναι συμμετρική ως προς τον πολικό άξονα.

Η ευθεία θ=α είναι εφαπτόμενη στο πόλο του γραφήματος της r=f(θ) αν f(α)=0 και f′(α) ≠ 0.

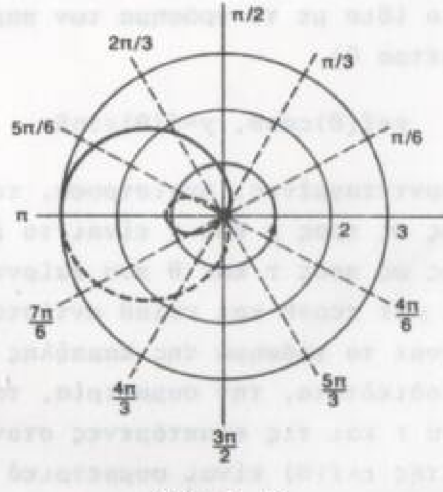
Ας δούμε μερικά παραδείγματα:

Παράδειγμα 2.26.

Έστω $r=1-2\cos\theta$. Αυτή είναι περιοδική με περίοδο 2π και συμμετρική ως προς τον πολικό άξονα. Επομένως αρκεί να πάρουμε τις τιμές του θ στο διάστημα $[0,\pi]$. Οι εφαπτόμενες στον πόλο είναι για $\theta=\frac{\pi}{3}$. Σχηματίζουμε τον επόμενο πίνακα:

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
r	-1	$1-\sqrt{3}$	$1-\sqrt{2}$	0	1	2	$1+\sqrt{2}$	$1+\sqrt{3}$	3

Το γράφημά της αποδίδεται στο σχήμα 2.16.

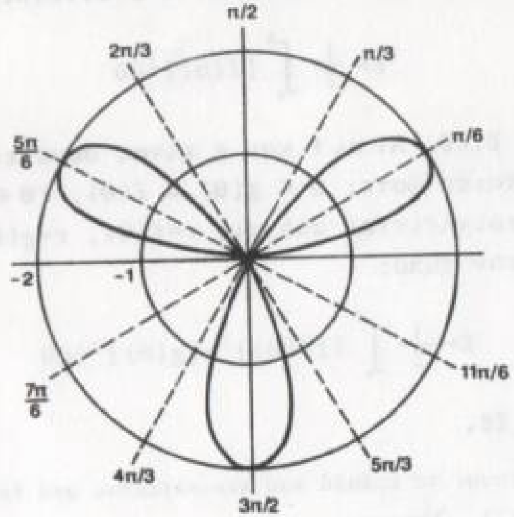


Σχήμα 2.16.

Παράδειγμα 2.27.

Ας κάνουμε το γράφημα της $r=2\sin 3\theta$. Αυτή έχει περίοδο $\frac{2\pi}{3}$, είναι συμμετρική ως προς την ευθεία $\theta=\frac{\pi}{2}$, έχει εφαπτόμενες στον πόλο για $\theta=0$, $\theta=\frac{\pi}{3}$ και $\theta=\frac{2\pi}{3}$ και η μέγιστη τιμή του r είναι 2 για $\theta=\frac{\pi}{6}$ και $\theta=\frac{5\pi}{6}$ και η ελάχιστη -2 για $\theta=\frac{\pi}{2}$.

θ	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$
r	0	$\sqrt{2}$	2	0	$-\sqrt{2}$	-2



Σχήμα 2.17.

Παρατήρηση 2.26.

Όσον αφορά την γραφική παράσταση των καμπύλων $r=f(\theta)$ αξίζει να σημειώσουμε τα εξής:

Οι εξισώσεις της μορφής

$$r=\alpha\pm\beta\cos\theta \quad \text{ή} \quad r=\alpha\pm\beta\sin\theta$$

έχουν γραφήματα που λέγονται κ ο χ λ ί ε ς. Αν $|\alpha|<|\beta|$ ο κοχλίας έχει δύο θηλειές. Αν $|\alpha|=|\beta|$ έχει μια θηλειά και λέγεται καρδιοειδής. Αν $|\alpha|>|\beta|$ έχει μια θηλειά και έχει την μορφή παραμορφωμένου κύκλου.

Οι εξισώσεις της μορφής

$$r=\alpha\cos(\nu\theta) \quad \text{ή} \quad r=\alpha\sin(\nu\theta),\ \nu\geq 2$$

παριστάνουν πέταλα λουλουδιών. Αν ν περιττός η καμπύλη έχει ν πέταλα, ενώ αν ν άρτιος η καμπύλη έχει 2ν πέταλα.

Για να υπολογίσουμε το εμβαδό που περικλείεται από μια καμπύλη σε πολικές συντεταγμένες εφαρμόζουμε τα παρακάτω θεωρήματα, που τα αναφέρουμε χωρίς απόδειξη:

Θεώρημα 2.27. Αν η f είναι συνεχής και μη αρνητική στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, όπου $0<\beta-\alpha\leq 2\pi$ τότε το εμβαδό που περικλείεται από την $r=f(\theta)$, $\theta=\alpha$ και $\theta=\beta$ δίνεται από τον τύπο:

$$E=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}[f(\theta)]^2d\theta$$

Θεώρημα 2.28. Αν οι f και g είναι συνεχείς στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και τέτοιες ώστε: $0\leqslant g(\theta)\leqslant f(\theta)$, $\forall\theta\in[\alpha,\beta]$ τότε το εμβαδό που περικλείεται από τις $r=f(\theta)$, $r=g(\theta)$, $\theta=\alpha$ και $\theta=\beta$ δίνεται από τον τύπο:

$$E=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\{[f(\theta)]^2-[g(\theta)]^2\}d\theta$$

Παράδειγμα 2.28.

Θα υπολογίσουμε το εμβαδό που περικλείεται από την καμπύλη $r=2\sin3\theta$ (Βλέπε σχήμα 2.17). Έχουμε:

$$E=3\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/3}4\sin^2 3\theta d\theta=6\int_0^{\pi/3}\frac{1-\cos6\theta}{2}d\theta$$

$$=3\int_0^{\pi/3}(1-\cos6\theta)d\theta=3\left[\theta-\frac{\sin6\theta}{6}\right]_0^{\pi/3}=\pi$$

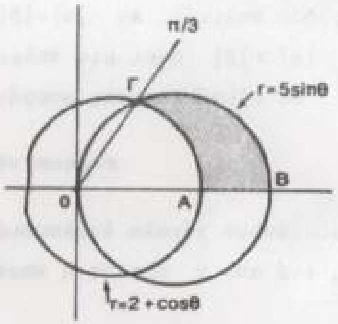
Παράδειγμα 2.29.

Θα υπολογίσουμε το εμβαδό που βρίσκεται μέσα στον κύκλο $r=5\cos\theta$ και έξω από την καμπύλη $r=2+\cos\theta$ (Σχήμα 2.18). Το ζητούμενο εμβαδό είναι το διπλάσιο του ΑΒΓΑ. Στο διάστημα $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{3}$ είναι $2+\cos\theta\leqslant r\leqslant 5\cos\theta$. Άρα

$$E=2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/3}[25\cos^2\theta-(4+4\cos\theta+\cos^2\theta)]d\theta$$

$$=\int_0^{\pi/3}(8+12\cos2\theta-4\cos\theta)d\theta$$

$$=\frac{8\pi}{3}+\sqrt{3}$$



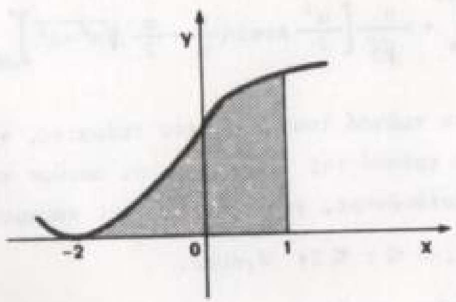
Σχήμα 2.18

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από το γράφημα της συναρτήσεως $f(x)=e^{-x}(x^2+3x+1)+e^2$, τον άξονα Ox και τις ευθείες τις παράλληλες προς τον άξονα Oy, που περνάνε από τα σημεία των τοπικών ακροτάτων της συναρτήσεως.

Λύση

Θα βρούμε πρώτα τα σημεία των άκρων τιμών της συναρτήσεως. Είναι $f'(x)=e^{-x}(-x^2-x+2)$ και $f''(x)=e^{-x}(x^2-x-3)$. Επειδή $f'(x)=0$ για $x=-2$ και $x=1$ και $f''(-2)>0$, $f''(1)<0$ η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x=-2$ το $f_{min}=f(-2)=0$ και μέγιστο για $x=1$ το $f_{max}=f(1)=5e^{-1}+e^2$. Το εμβαδό που ζητάμε είναι του μαυρισμένου χωρίου στο σχήμα 2.19.



Σχήμα 2.19.

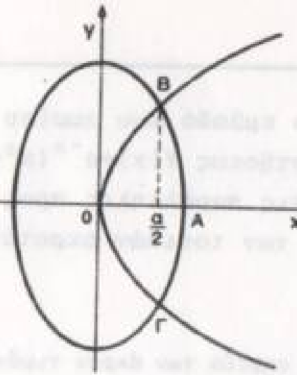
Επειδή $f(x)\geqslant 0$, $\forall x\in[-2,1]$ θα έχουμε:

$$E=\int_{-2}^{1}[e^{-x}(x^2+3x+1)+e^2]dx=[-e^{-x}(x^2+5x+6)+e^2x]_{-2}^{1}=\frac{3e^3-12}{e}$$

2. Να αποδείξετε ότι η παραβολή $y^2=2\alpha x$ διαιρεί την έλλειψη $4x^2+3y^2=4\alpha^2$ σε δυο μέρη, των οποίων ο λόγος των εμβαδών είναι $\dfrac{4\pi+\sqrt{3}}{8\pi-\sqrt{3}}$.

Απόδειξη

Λύνοντας το σύστημα $y^2=2\alpha x$, $4x^2+3y^2=4\alpha^2$ βρίσκουμε την τετμημένη του σημείου τομής Γ την $x=\frac{\alpha}{2}$. Θα έχουμε:



Σχήμα 2.20.

$$E_1=E_{OBA\Gamma}=2E_{OBA}=2\int_0^{a/2}\sqrt{2a}\cdot\sqrt{x}\,dx+2\int_{a/2}^{a}\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$=2\sqrt{2a}\,\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\Big|_0^{a/2}+\frac{4}{\sqrt{3}}\left[\frac{a^2}{2}\,\mathrm{Arsin}\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}\right]_{a/2}^{a}=\frac{a^2(4\pi+\sqrt{3})}{6\sqrt{3}}$$

Για να βρούμε το εμβαδό του υπόλοιπου τμήματος, αρκεί να αφαιρέσουμε το E_1 από το εμβαδό της έλλειψης. Ας βρούμε πρώτα το εμβαδό της έλλειψης. Χρησιμοποιώντας, για ευκολία, τις παραμετρικές εξισώσεις $x=a\cos t$, $y=\frac{2a}{\sqrt{3}}\sin t$, $0\leq t\leq 2\pi$ έχουμε:

$$E=4\int_0^{a}y\,dx=4\int_{\pi/2}^{0}\frac{2a}{\sqrt{3}}\sin t\cdot(-a\sin t)\,dt=\frac{2\pi a^2}{\sqrt{3}}$$

Άρα

$$E_2=E-E_1=\frac{2\pi a^2}{\sqrt{3}}-\frac{a^2(4\pi+\sqrt{3})}{6\sqrt{3}}=\frac{a^2(8\pi-\sqrt{3})}{6\sqrt{3}}$$

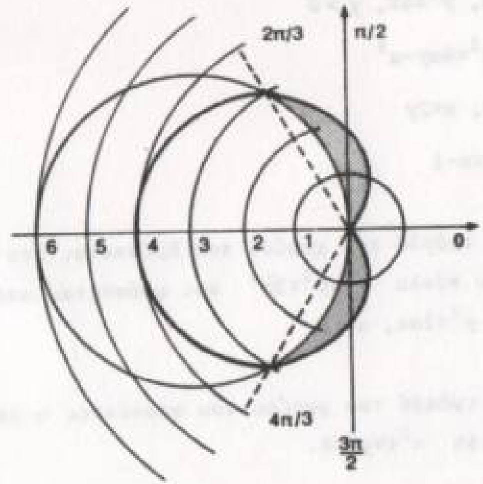
Επομένως πραγματικά,

$$\frac{E_1}{E_2}=\frac{a^2(4\pi+\sqrt{3})}{6\sqrt{3}}:\frac{a^2(8\pi-\sqrt{3})}{6\sqrt{3}}=\frac{4\pi+\sqrt{3}}{8\pi-\sqrt{3}}$$

3. Να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου που βρίσκεται έξω από τον κύκλο $r=-6\sin\theta$ και μέσα στην καρδιοειδή $r=2(1-\cos\theta)$.

Λύση

Για $0\leq\theta\leq\pi$ οι καμπύλες τέμνονται στον πόλο και στο σημείο



Σχήμα 2.21.

$\left(3,\frac{2\pi}{3}\right)$. Παρατηρούμε ότι το σημείο $\left(3,\frac{2\pi}{3}\right)$ έχει τις ίδιες συντεταγμένες και στην καρδιοειδή και στον κύκλο, ενώ ο πόλος έχει συντεταγμένες $(0,0)$ στην καρδιοειδή και $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ στον κύκλο. Άρα

$$E=2\left[\frac{1}{2}\int_0^{2\pi/3}(2-2\cos\theta)^2d\theta-\frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{2\pi/3}(-6\cos\theta)^2d\theta\right]$$

$$=\int_0^{2\pi/3}(6-8\cos\theta+2\cos2\theta)d\theta-18\int_{\pi/2}^{2\pi/3}(1+\cos2\theta)d\theta$$

$$=\left[6\theta-8\sin\theta+\sin2\theta\right]_0^{2\pi/3}-18\left[\theta+\frac{\sin2\theta}{2}\right]_{\pi/2}^{2\pi/3}=\pi$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

2.52. Να βρεθούν τα εμβαδά των χωρίων που περικλείονται από τις παρακάτω καμπύλες:

α) $f(x)=\frac{\sin2x}{1+\sin x}$, $0\leq x\leq\frac{\pi}{4}$, $y=0$

β) $f(x)=x^2-x-2$, $-2\leq x\leq 3$, $y=0$

γ) $f(y)=-2y^2$, $g(y)=1-3y^2$

δ) $f(x)=\sin x$, $g(x)=\cos x$, $0 \leq x \leq 2\pi$

ε) $x^2+y^2=2\alpha x$, $y^2=\alpha x$, $y>0$

στ) $x^2=2\alpha y$, $x^2=4\alpha y-\alpha^2$

ζ) $x^2+4y-8=0$, $x=2y$

η) $x=y^2-1$, $y=x-1$

2.53. Να βρεθεί το εμβαδό του χώρου που βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο μέσα στον κύκλο $x^2+y^2=3\alpha^2$ και φράσσεται από τις παραβολές $x^2=2\alpha y$ και $y^2=2\alpha x$, $\alpha>0$

2.54. Να βρεθεί το εμβαδό του χώρου που αποκόπτει η υπερβολή $x^2-3y^2=1$ από την έλλειψη $x^2+4y^2=8$.

2.55. Να βρεθεί το εμβαδό που περικλείεται από την καμπύλη $y^2=4x^2(1-x)$. (Το εμβαδό της θηλειάς).

2.56. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y=x$ διαιρεί την έλλειψη $x^2+3y^2=6y$ σε δύο μέρη, που τα εμβαδά τους έχουν λόγο $\dfrac{4\pi-3\sqrt{3}}{8\pi+3\sqrt{3}}$

2.57. Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του χώρου που περικλείεται από το γράφημα της $f(x)=e^{-\alpha x}\sin\beta x$, $x \geq 0$ και του άξονα Ox μεταξύ τριών διαδοχικών σημείων τομής με τον άξονα Ox είναι $\dfrac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}(1+e^{-\alpha\pi/\beta})^2$

2.58. Να βρεθεί το εμβαδό του χώρου που βρίσκεται μέσα στον κύκλο $x=\alpha\cos\theta$, $y=\alpha\sin\theta$ και έξω από την υπερβολή $x=\beta\cosh u$, $y=\beta\sinh u$, όπου $0<\beta<\alpha$.

2.59. Να βρεθούν τα εμβαδά των χώρων που περικλείονται από τις παρακάτω καμπύλες:

α) $x=\alpha(t^2-1)$, $y=\beta(4t-t^3)$, $\alpha>0$, $\beta>0$

β) $x=\alpha\sin t$, $y=\beta\sin 2t$, $\alpha>0$, $\beta>0$

γ) $x=t^2$, $y=\dfrac{t}{3}(3-t^2)$

δ) $x=t^2-1$, $y=t^3-t$

ε) $x=\cos t$, $y=\sin^3 t$

στ) $x=2\cos^2 t$, $y=\sin 2t$

2.60. Να βρεθούν τα εμβαδά που περικλείονται από τις καμπύλες:

α) $r=1-\cos\theta$

β) $r=1-2\sin\theta$ (της μικρής θηλειάς)

γ) $r=\sin\theta$, $r=1-\sin\theta$

δ) έξω από την $r=1$ και μέσα στην $r=1+\cos\theta$

ε) έξω από την $r=\alpha$ και μέσα στην $r^2=2\alpha^2\cos\theta$, $-\dfrac{\pi}{4} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{4}$

στ) $r=\cos\theta$, $r=2(1-\sin\theta)$, $-\pi \leq \theta \leq \pi$

ζ) μέσα στην $r=-6\cos\theta$ και έξω από την $r=2(1-\cos\theta)$

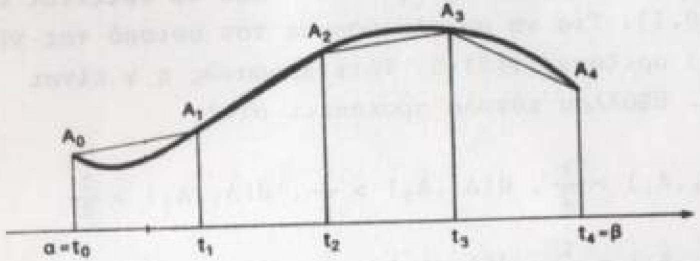
η) έξω από την $r=1+\cos\theta$ και μέσα στην $r=3\cos\theta$

β) Μήκος τόξου καμπύλης

Έστω μια καμπύλη γ με παραμετρικές εξισώσεις:

$$x=g(t),\ y=f(t),\ t \in [\alpha,\beta]$$

(Σχήμα 2.22) και $P=\{t_0,t_1,\ldots,t_\nu\}$ μια διαμέριση του $[\alpha,\beta]$.



Σχήμα 2.22.

Ας είναι $A_k=[g(t_k),f(t_k)]$ τα αντίστοιχα σημεία της γ. Τα σημεία αυτά ορίζουν μια πολυγωνική γραμμή. Σχηματίζουμε το άθροισμα

$$L_P=\sum_{i=1}^{\nu}\sqrt{[g(t_i)-g(t_{i-1})]^2+[f(t_i)-f(t_{i-1})]^2}$$

που είναι το μήκος της πολυγωνικής γραμμής που ορίζουν τα σημεία A_k. Θεωρούμε το σύνολο L όλων των αριθμών L_P που αντιστοιχούν σε όλες τις δυνατές διαμερίσεις P του [α,β]. Αν **το σύνολο αυτό L είναι φραγμένο, τότε η καμπύλη λέγεται ευθυγραμμίσιμη και το supremum S=L(γ) αυτού του συνόλου λέγεται μήκος της καμπύλης.** Γράφουμε $S=L_\alpha^\beta(\gamma)$ για να δηλώσουμε το μήκος τόξου της καμπύλης που ορίζεται στο διάστημα [α,β].

Αν οι συναρτήσεις g και f είναι συνεχείς, τότε η καμπύλη γ δεν είναι αναγκαστικά ευθυγραμμίσιμη. Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε την εξής ακολουθία σημείων του επιπέδου: $A_0=(1,0), A_1=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right), A_2=\left(\frac{1}{3},0\right), A_3=\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$ κ.τ.λ. δηλ. γενικά:

$$A_\nu=\left(\frac{1}{\nu+1},\frac{1}{\nu+1}\right),\ \text{αν } \nu \text{ περιττός}$$

και

$$A_\nu=\left(\frac{1}{\nu+1},0\right),\ \text{αν } \nu \text{ άρτιος}$$

Μπορούμε εύκολα να κατασκευάσουμε μια καμπύλη γ που να έχει ίχνος $A_0A_1 \cup A_1A_2 \cup \ldots A_\nu A_{\nu+1} \cup \ldots$ και να ορίζεται στο διάστημα (0,1]. Για να συμπληρώσουμε τον ορισμό της γ(t) για $t\in[0,1]$ ορίζουμε γ(0)=0. Τότε προφανώς η γ είναι συνεχής καμπύλη. Εξάλλου εύκολα προκύπτει ότι*:

$$d(A_0,A_1)>\frac{1}{2},\ d(A_1,A_2)>\frac{1}{2},\ d(A_2,A_3)>\frac{1}{4}$$

$$d(A_3,A_4)>\frac{1}{4},\ d(A_4,A_5)>\frac{1}{6},\ d(A_5,A_6)>\frac{1}{6}\ \text{κ.τ.λ.}$$

* Με $d(A_0,A_1)$ συμβολίζουμε την απόσταση των σημείων A_0 και A_1.

Επομένως, αν το μήκος τόξου της γ υπάρχει, πρέπει να είναι μεγαλύτερο από το άθροισμα

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\cdots$$

ή

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{\nu}+\cdots$$

Αυτή όμως είναι η αρμονική σειρά, η οποία ξέρουμε ότι δεν συγκλίνει. Άρα η καμπύλη γ δεν έχει μήκος.

Για να είναι μια καμπύλη ευθυγραμμίσιμη χρειάζονται πιο ισχυρές συνθήκες από την συνέχεια. Πρέπει οι συναρτήσεις g και f να είναι φραγμένης μεταβολής στο [α,β], που είναι ισοδύναμο με το να έχουν οι g και f′ συνεχείς παραγώγους στο [α,β] (Εφαρμογή 3β της §2.6).

Θεώρημα 2.29. Αν οι g′ και f′ είναι συνεχείς στο [α,β] τότε η καμπύλη γ είναι ευθυγραμμίσιμη στο [α,β] και έχει μήκος

$$S=L(\gamma)=\int_\alpha^\beta\sqrt{[g'(t)]^2+[f'(t)]^2}\,dt$$

Για την απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος θα χρειαστούμε το επόμενο

Λήμμα: Έστω γ μια ευθυγραμμίσιμη καμπύλη στο [α,β]. Αν α<c<β τότε:

$$L_\alpha^\beta(\gamma)=L_\alpha^c(\gamma)+L_c^\beta(\gamma)$$

Απόδειξη

Έστω γ_1 και γ_2 οι περιορισμοί της γ στα διαστήματα [α,c] και [c,β] αντίστοιχα. Έστω P_1 και P_2 διαμερίσεις αντίστοιχα των [α,c] και [c,β]. Τότε η $P=P_1\cup P_2$ είναι διαμέριση του [α,β]. Ας είναι $A_0, A_1,\ldots,A_\nu$ τα σημεία στην γ που αντιστοιχούν στα σημεία της διαμέρισης P. Τότε θα έχουμε: $L_{P_1}+L_{P_2}=L_P$. Αφού από τον ορισμό $L_P\leq L(\gamma)$ θα έχουμε:

$$L_{P_1} \leq L(\gamma)-L_{P_2}$$

για κάθε διαμέριση P_1 του $[\alpha,c]$. Δηλαδή το $L(\gamma)-L_{P_2}$ είναι άνω φράγμα του συνόλου των αριθμών $\{L_{P_1}: P_1$ διαμέριση του $[\alpha,c]\}$. Όμως $L(\gamma_1)$ είναι το sumpremum αυτού του συνόλου και επομένως:

$$L(\gamma_1) \leq L(\gamma)-L_{P_2}$$

ή

$$L_{P_2} \leq L(\gamma)-L(\gamma_1)$$

Επαναλαμβάνοντας το ίδιο σκεπτικό έχουμε:

$$L(\gamma_2) \leq L(\gamma)-L(\gamma_1)$$

ή

$$L(\gamma_1)+L(\gamma_2) \leq L(\gamma) \tag{1}$$

Για να αποδείξουμε την αντίστροφη ανισότητα της (1) θεωρούμε μια οποιαδήποτε διαμέριση P του $[\alpha,\beta]$ και $A_0,A_1,\ldots,A_\nu$ τα σημεία της γ που αντιστοιχούν στα σημεία της P. Το σημείο $\gamma(c)$ θα βρίσκεται μεταξύ δυο διαδοχικών σημείων A_{i-1} και A_i ή στην καλύτερη περίπτωση θα ταυτίζεται με ένα από αυτά. Διαλέγουμε μια άλλη διαμέριση P' του $[\alpha,\beta]$ κατά τέτοιο τρόπο ώστε οι κορυφές της πολυγωνικής γραμμής να είναι τα $A_0,A_1,\ldots,A_{i-1}, \gamma(c),A_i,\ldots,A_\nu$. (Αν το $\gamma(c)$ ταυτίζεται με κάποιο A_i τότε $P'\equiv P$). Προφανώς $L_P \leq L_{P'}$.

Στις κορυφές $A_0,A_1,\ldots,A_{i-1}, \gamma(c)$ αντιστοιχεί μια διαμέριση P_1 του $[\alpha,c]$ και στις κορυφές $\gamma(c), A_i,\ldots,A_\nu$ μια διαμέριση P_2 του $[c,\beta]$. Άρα

$$L_P \leq L_{P'}=L_{P_1}+L_{P_2} \leq L(\gamma_1)+L(\gamma_2)$$

Αφού αυτό ισχύει για κάθε διαμέριση P του $[\alpha,\beta]$ θα έχουμε:

$$L(\gamma) \leq L(\gamma_1)+L(\gamma_2) \tag{2}$$

Από τις (1) και (2) έχουμε το ζητούμενο. ■

Απόδειξη του θεωρήματος 2.29.

Θα αποδείξουμε πρώτα ότι η καμπύλη γ είναι ευθυγραμμίσιμη.

Αφού οι x' και y' είναι συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$ τότε και οι $(x')^2$ και $(y')^2$ είναι συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$ και επομένως θα παίρνουν μέγιστες τιμές στο $[\alpha,\beta]$, έστω $[x'(u)]^2$ και $[y'(\upsilon)]^2$ αντίστοιχα.

Ας είναι P μια διαμέριση του $[\alpha,\beta]$ και $A_0,A_1,\ldots,A_\nu$ τα σημεία στην γ με $A_0=\gamma(\alpha)$, $A_\nu=\gamma(\beta)$. Τότε:

$$L_P=\sum_{i=1}^{\nu} \sqrt{[x(t_i)-x(t_{i-1})]^2+[y(t_i)-y(t_{i-1})]^2}$$

Από το Θεώρημα Μέσης τιμής του Διαφορικού Λογισμού υπάρχουν w_i και z_i σε κάθε διάστημα (t_{i-1},t_i) τέτοια ώστε:

$$x(t_i)-x(t_{i-1})=x'(w_i)(t_i-t_{i-1})$$

$$y(t_i)-y(t_{i-1})=y'(z_i)(t_i-t_{i-1})$$

Έτσι

$$L_P=\sum_{i=1}^{\nu} \sqrt{[x'(w_i)]^2+[y'(z_i)]^2}(t_i-t_{i-1}) \tag{3}$$

Όμως $[x'(w_i)]^2 \leq [x'(u)]^2$ και $[y'(z_i)]^2 \leq [y'(\upsilon)]^2\ \forall i$. Επομένως:

$$L_P \leq \sqrt{[x'(u)]^2+[y'(\upsilon)]^2}\sum_{i=1}^{\nu}(t_i-t_{i-1})$$

$$\leq (\beta-\alpha)\sqrt{[x'(u)]^2+[y'(\upsilon)]^2} \tag{4}$$

Έτσι λοιπόν έχουμε ότι το σύνολο $\{L_P,\ P$ διαμέριση του $[\alpha,\beta]\}$ είναι άνω φραγμένο και επομένως η γ είναι ευθυγραμμίσιμη.

Ορίζουμε τώρα την συνάρτηση

$$S(t)=\begin{cases} L_\alpha^t(\gamma), & \alpha < t \leq \beta \\ 0, & t=\alpha \end{cases}$$

Δηλαδή $S(t)$ είναι το μήκος τόξου της γ από α μέχρι t. Θα αποδείξουμε ότι η S είναι παραγωγίσιμη με

$$S'(t)=\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}$$

Για $h>0$ είναι

$$S(t+h)-S(t)=L_{\alpha}^{t+h}(\gamma)-L_{\alpha}^{t}(\gamma)=L^{t+h}(\gamma)$$

από το Λήμμα.

Από την (4) με $\alpha=t$, $\beta=t+h$ έχουμε:

$$S(t+h)-S(t)=L_{t}^{t+h}(\gamma) \leq h\sqrt{[x'(u)]^2+[y'(\upsilon)]^2} \tag{5}$$

για κάποιους αριθμούς $u,\upsilon \in (t,t+h)$

Θεωρώντας τώρα την καμπύλη γ από t μέχρι $t+h$ από την (3) έχουμε:

$$L_p=h\sqrt{[x'(w)]^2+[y'(z)]^2} \quad \text{για τυχαίους } w,z \in (t,t+h)$$

Αφού $L_p \leq L_t^{t+h}(\gamma)$ θα έχουμε:

$$h\sqrt{[x'(w)]^2+[y'(z)]^2} \leq S(t+h)-S(t) \tag{6}$$

Από τις (5) και (6) παίρνουμε*:

$$\sqrt{[x'(w)]^2+[y'(z)]^2} \leq \frac{S(t+h)-S(t)}{h} \leq \sqrt{[x'(u)]^2+[y'(\upsilon)]^2} \tag{7}$$

Αφού οι x',y' είναι συνεχείς και $w,z,u,\upsilon \in (t,t+h)$ παίρνοντας τα όρια στην (7) έχουμε ότι:

$$S'(t)=\lim_{h\to 0}\frac{S(t+h)-S(t)}{h}=\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}$$

Επομένως
$$L_{\alpha}^{\beta}(\gamma)=S(\beta)=S(\beta)-S(\alpha)=\int_{\alpha}^{\beta} S'(t)dt$$
$$=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}dt. \blacksquare$$

Ειδικά, αν η γ δίνεται από την $y=f(x), x \in [\alpha,\beta]$, όπου η f' υπάρχει και είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, τότε από το Θεώρημα 2.29, θέτοντας $x=t$, $y=f(t)$ έχουμε ότι:

* Η (7) ισχύει επίσης και για $h<0$

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$$

Αν η γ δίνεται σε πολικές συντεταγμένες $r=r(\theta), \theta \in [\theta_1, \theta_2]$ τότε προκύπτει εύκολα, από το Θεώρημα 2.29 ότι:

$$S=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{r^2(\theta)+[r'(\theta)]^2}d\theta$$

Παράδειγμα 2.30.

Ας βρούμε το μήκος τόξου της παραβολής $y^2=4x$ ή σε παραμετρικές εξισώσεις $x=t^2$, $y=2t$ με $t \in [0,1]$. Έχουμε:

$$S=\int_0^1\sqrt{(2t)^2+4}dt=2\int_0^1\sqrt{t^2+1}dt$$
$$=2\left[\frac{1}{2}t\sqrt{1+t^2}+\frac{1}{2}\log|t+\sqrt{1+t^2}|\right]_0^1 \quad \text{(άσκηση 1.11β)}$$
$$=\sqrt{2}+\log(1+\sqrt{2}).$$

Παράδειγμα 2.31.

Το μήκος της έλλειψης $x=\alpha\cos t$, $y=\beta\sin t$, $t \in [0,2\pi]$ είναι:

$$S=\int_0^{2\pi}\sqrt{\alpha^2\sin^2t+\beta^2\cos^2t}\,dt=\alpha\int_0^{2\pi}\sqrt{1-k^2\cos^2t}\,dt$$

όπου $k^2=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2}<1$. Το ολοκλήρωμα αυτό δεν υπολογίζεται στοιχειωδώς, παρά μόνο με την βοήθεια σειρών. Αυτό λέγεται *ελλειπτικό ολοκλήρωμα* (Βλέπε και §1.9). Η ονομασία προήλθε από αυτό ακριβώς το γεγονός, επειδή πρωτοεμφανίστηκε στον υπολογισμό του μήκους της έλλειψης.

Παράδειγμα 2.32.

Για την καμπύλη $x=\cos t(1+\cos t)$, $y=\sin t(1+\cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ έχουμε:

$$S=\int_0^{2\pi}\sqrt{x'^2+y'^2}dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{(-\sin t-\sin 2t)^2+(\cos t+\cos 2t)^2}dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1+\cos t)}\,dt = 2\int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2\frac{t}{2}}\,dt = 2\int_0^{2\pi} \left|\cos\frac{t}{2}\right| dt$$

$$=2\int_0^{\pi} \cos\frac{t}{2}\,dt - 2\int_{\pi}^{2\pi} \cos\frac{t}{2}\,dt = 8$$

Παράδειγμα 2.33.

Το μήκος της καρδιοειδούς $r=\alpha(1-\cos\theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ είναι:

$$S=2\int_0^{\pi} \sqrt{r^2+r'^2}\,d\theta = 2\int_0^{\pi} \sqrt{\alpha^2(1-\cos\theta)^2+\alpha^2\sin^2\theta}\,d\theta$$

$$=2\alpha\int_0^{\pi} \sqrt{2(1-\cos\theta)}\,d\theta = 4\alpha\int_0^{\pi} \sin\frac{\theta}{2}\,d\theta = 8\alpha$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να βρεθεί το μήκος της καμπύλης

$$x=\alpha\left(\cos t+\log tg\frac{t}{2}\right)$$

$$y=\alpha\sin t \qquad , \frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{3\pi}{4},\ \alpha>0$$

Λύση

Έχουμε:

$$x'=\alpha\left(-\sin t+\frac{1}{tg\frac{t}{2}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{t}{2}}\cdot\frac{1}{2}\right)=\alpha\left(-\sin t+\frac{1}{\sin t}\right)=\alpha\cdot\cos t\cdot ctgt$$

$$y'=\alpha\cos t$$

$$x'^2+y'^2=\alpha^2\cos^2 t\cdot ctg^2 t+\alpha^2\cos^2 t=\alpha^2 ctg^2 t$$

Επομένως

$$S=\int_{\pi/2}^{3\pi/4} \sqrt{x'^2+y'^2}\,dt=\int_{\pi/2}^{3\pi/4} \alpha|ctgt|\,dt=-\alpha\int_{\pi/2}^{3\pi/4} ctgt\,dt$$

$$=-\alpha\log\sin t\,\Big|_{\pi/2}^{3\pi/4}=-\alpha\log\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\left(\text{Παρατηρούμε ότι } S>0, \text{ αφού } \log\frac{\sqrt{2}}{2}<0\right)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

2.61. Να βρεθούν τα μήκη των καμπύλων:

α) $f(x)=x^{3/2}$, $0 \leq x \leq 4$

β) $f(x)=\log(\cos x)$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$

γ) $f(x)=\frac{1}{2}[x\sqrt{x^2-1}-\log(x+\sqrt{x^2-1})]$, $1 \leq x \leq 2$

δ) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+\cos^2 x}}{\cos x}-\log(\cos x+\sqrt{1+\cos^2 x})$, $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$

ε) $f(x)=\alpha\log\dfrac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-x^2}}{x}-\sqrt{\alpha^2-x^2}$, $\frac{\alpha}{6} \leq x \leq \frac{\alpha}{2}$

2.62. Επίσης να βρεθούν τα μήκη των καμπύλων:

α) $x=\cos^3 t$, $y=\sin^3 t$, $0 \leq t \leq 2\pi$

β) $x=\alpha(t-\sin t)$, $y=\alpha(1-\cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$

γ) $x=\alpha(2\cos t-\cos 2t)$, $y=\alpha(2\sin t-\sin 2t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$

δ) $x=\alpha(\cos t+t\sin t)$, $y=\alpha(\sin t-t\cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$

ε) $x=(t^2-2)\sin t+2t\cos t$, $y=(2-t^2)\cos t+2t\sin t$, $0 \leq t \leq \pi$

στ) $x=e^t(\cos t+\sin t)$, $y=e^t(\cos t-\sin t)$, $0 \leq t \leq \pi$

ζ) $x=t-tght$, $y=\dfrac{1}{cosht}$, $-\log 2 \leq t \leq \log 2$

η) $r=\alpha(1+\cos\theta)$, $\alpha>0$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$

θ) $r=\alpha\sin^3\frac{\theta}{3}$, $\alpha>0$

2.63. Να βρεθούν οι παραμετρικές εξισώσεις της καμπύλης $y=\frac{\alpha}{2}\left(e^{x/\alpha}+e^{-x/\alpha}\right)$ αν ληφθεί ως παράμετρος το μήκος τόξου από το σημείο $(0,\alpha)$ μέχρι το (x,y).

2.64. Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από το γράφημα της $f(x)=\alpha\cosh\frac{x}{\alpha}$, τον άξονα Ox και τις ευθείες $x=\beta$, $x=\gamma$ ισούται με $\alpha\cdot s$, όπου s το μήκος της ίδιας καμπύλης στο διάστημα

γ) Εμβαδό επιφάνειας από περιστροφή

Έστω μια καμπύλη γ με παραμετρικές εξισώσεις

$$x=g(t),\ y=f(t),\ t\in[\alpha,\beta]$$

(Σχήμα 2.22), $P=\{t_0,t_1,\dots,t_\nu\}$ μια διαμέριση του $[\alpha,\beta]$ και $A_k=[g(t_k),f(t_k)]$ τα αντίστοιχα σημεία της γ. Υποθέτουμε ότι το γράφημα της καμπύλης περιστρέφεται γύρω από τον άξονα Ox. Τότε η πολυγωνική γραμμή που περιστρέφεται μαζύ με την καμπύλη διαγράφει μια επιφάνεια που έχει εμβαδό, έστω ε_P. Θεωρούμε το σύνολο ε όλων των αριθμών ε_P που αντιστοιχούν σε όλες τις δυνατές διαμερίσεις του $[\alpha,\beta]$. **Αν το σύνολο αυτό ε είναι φραγμένο, τότε η καμπύλη λέγεται τετραγωνίσιμη και το supremum B αυτού του συνόλου λέγεται εμβαδό της επιφάνειας που προκύπτει από περιστροφή της γ γύρω από τον άξονα Ox.**

Αποδεικνύεται ότι αν η καμπύλη γ με $f(t)\geqslant 0,\ \forall t\in[\alpha,\beta]$ είναι ευθυγραμμίσιμη, τότε η επιφάνεια που παράγεται από την περιστροφή της γύρω από τον άξονα Ox είναι τετραγωνίσιμη. Επίσης αποδεικνύεται ότι αν f΄ και g΄ είναι συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$ τότε:

$$B=2\pi\int_\alpha^\beta |f(t)|\sqrt{[g'(t)]^2+[f'(t)]^2}\,dt$$

Ειδικά, αν η γ δίνεται από την $y=f(x)$, τότε:

$$B=2\pi\int_\alpha^\beta |f(x)|\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

ενώ αν δίνεται σε πολικές συντεταγμένες $r=r(\theta),\ \theta\in[\theta_1,\ \theta_2]$ τότε

$$B=2\pi\int_{\theta_1}^{\theta_2} r\sin\theta\sqrt{r^2(\theta)+[r'(\theta)]^2}\,d\theta$$

Παράδειγμα 2.34.

Θα υπολογίσουμε το εμβαδό της επιφάνειας που προκύπτει από περιστροφή γύρω από τον άξονα Ox ενός τόξου της καμπύλης $x=t^2, y=\frac{t}{3}(t^2-3)$ μεταξύ των σημείων τομής της καμπύλης και του Ox.

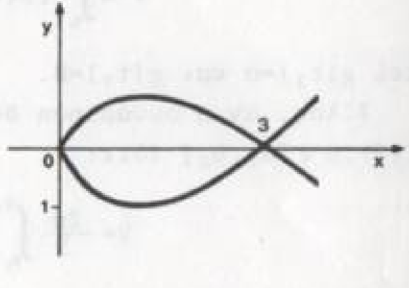
Θέτοντας y=0 βρίσκουμε t=0 και $t=\pm\sqrt{3}$. Τότε x=0 ή x=3. Αυτό σημαίνει ότι η καμπύλη τέμνει τον Ox στα σημεία (0,0) και (3,0). Αν θέσουμε όπου t το −t το x δεν μεταβάλλεται, ενώ το y αλλάζει πρόσημο. Άρα η καμπύλη είναι συμμετρική ως προς τον Ox και έχει την γραφική παράσταση του σχήματος 2.23.

Άρα:

$$B=2\pi\int_0^{\sqrt3}|y(t)|\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt$$

$$=2\pi\int_0^{\sqrt3}-\frac{t}{3}(t^2-3)\sqrt{4t^2+(t^2-1)^2}\,dt$$

$$=2\pi\int_0^{\sqrt3}-\frac{t}{3}(t^2-3)(1+t^2)\,dt=3\pi$$



Σχήμα 2.23.

Παράδειγμα 2.35.

Το εμβαδό της επιφάνειας που προκύπτει από περιστροφή της $r=\alpha(1-\cos\theta)$, $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ γύρω από τον άξονα Ox (πολικός άξονας) είναι:

$$B=2\pi\int_0^\pi \alpha(1-\cos\theta)\sin\theta\sqrt{\alpha^2(1-\cos\theta)^2+\alpha^2\sin^2\theta}\,d\theta=16\pi\alpha^2\int_0^\pi \sin^4\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta$$

$$=\frac{32}{5}\pi\alpha^2$$

δ) Όγκος στερεών από περιστροφή

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια συνεχή, μη αρνητική συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$. Αν το χωρίο που ορίζεται από το γράφημα της f τον άξονα Ox και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$, περιστραφεί γύρω από τον άξονα Ox, τότε παράγεται ένα στερεό που έχει όγκο

$$V=\pi\int_\alpha^\beta [f(x)]^2dx$$

Αν έχουμε δυο συναρτήσεις $f,g:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχείς και $f(x)\geqslant g(x)\geqslant 0,\ \forall x\in[\alpha,\beta]$ τότε ο όγκος του στερεού που παράγεται από περιστροφή γύρω από τον άξονα Ox, του χωρίου που ορίζεται από τα γραφήματα των f και g και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$, δίνεται από τον τύπο:

$$V=\pi\int_{\alpha}^{\beta}\{[f(x)]^2-[g(x)]^2\}dx$$

Αν η καμπύλη δίνεται σε παραμετρική μορφή $x=g(t)$, $y=f(t)$, $t\in[t_1,t_2]$ τότε:

$$V=\pi\int_{t_1}^{t_2}[f(t)]^2g'(t)dt$$

αρκεί $g(t_1)=\alpha$ και $g(t_2)=\beta$.

Τέλος, αν η συνάρτηση δίνεται σε πολικές συντεταγμένες $r=f(\theta)$, $\theta\in[\theta_1,\theta_2]$ τότε:

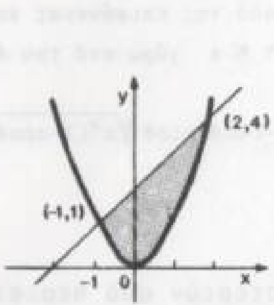
$$V=\frac{2\pi}{3}\int_{\theta_1}^{\theta_2}r^3\sin\theta d\theta$$

Παράδειγμα 2.36.

Το χωρίο που ορίζεται από την παραβολή $y=x^2$ και την ευθεία $y=x+2$ (σχήμα 2.24) στρέφεται γύρω από τον άξονα Ox. Τότε το στερεό που παράγεται έχει όγκο:

$$V=\pi\int_{-1}^{2}\{(x+2)^2-x^4\}dx$$

$$=\frac{72\pi}{5}$$



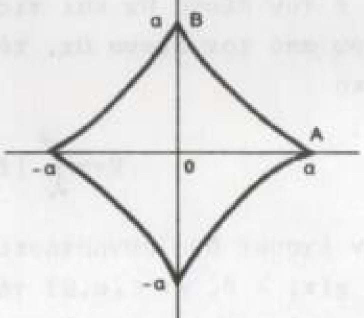
Σχήμα 2.24.

Παράδειγμα 2.37.

Ας βρούμε τον όγκο του στερεού που προκύπτει από περιστροφή γύρω από τον άξονα Ox της αστροειδούς $x=\alpha\cos^3t$, $y=\alpha\sin^3t$. (Σχήμα 2.25).

Ο ζητούμενος όγκος θα είναι δυο φορές ο όγκος που παράγεται από το χωρίο AOB. Δηλ.

$$V=2\pi\int_0^{\alpha}y^2dx$$



Σχήμα 2.25.

Επειδή $x(t_1)=0 \rightarrow t=\frac{\pi}{2}$ και $x(t_2)=\alpha \rightarrow t=0$ θα έχουμε:

$$V=2\pi\int_0^{\alpha}y^2dx=2\pi\int_{\pi/2}^{0}\alpha^2\sin^6t\cdot(-3\alpha\cos^2t\cdot\sin t)dt$$

$$=6\pi\alpha^3\left[\int_0^{\pi/2}\sin^7tdt-\int_0^{\pi/2}\sin^9tdt\right]$$

$$=6\pi\alpha^3\left(\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}-\frac{8}{9}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\right)$$ (εφαρμογή 2α της §2.7)

$$=\frac{32}{105}\pi\alpha^3$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να αποδείξετε ότι το εμβαδό επιφάνειας από περιστροφή γύρω από τον άξονα Ox της καμπύλης

$$x=\alpha\log\left(\frac{1}{\cos t}+\tan t\right)-\alpha\sin t$$

$$y=\alpha\cos t \qquad ,-\frac{\pi}{2}\leq t\leq\frac{\pi}{2},\ \alpha>0$$

ισούται με το εμβαδό της επιφάνειας μιας σφαίρας ακτίνας α και ο όγκος με το μισό του όγκου μιας σφαίρας ακτίνας α.

Απόδειξη

Έχουμε:

$$x'=\alpha\frac{1}{\frac{1+\sin t}{\cos t}}\cdot\frac{\cos^2t+(1+\sin t)\sin t}{\cos^2t}-\alpha\cos t=\alpha\frac{\sin^2t}{\cos t}$$

$$y'=-\alpha\sin t$$

$$x'^2+y'^2=\alpha^2\frac{\sin^4t}{\cos^2t}+\alpha^2\sin^2t=\alpha^2\frac{\sin^2t}{\cos^2t}$$

Επομένως

$$B=2\pi\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\alpha\cdot\cos t\cdot\alpha\left|\frac{\sin t}{\cos t}\right|dt=2\pi\alpha^2\int_{-\pi/2}^{0}-\sin tdt+2\pi\alpha^2\int_0^{\pi/2}\sin tdt=4\pi\alpha^2$$

$$V=\pi\int_{-\pi/2}^{\pi/2}a^2\cos^2 t\,\frac{a\sin^2 t}{\cos t}\,dt=\pi a^3\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin^2 t\cdot\cos t\,dt=\frac{2\pi a^3}{3}=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi a^3\right)$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

2.65. Να βρεθεί το εμβαδό της επιφάνειας από περιστροφή γύρω από τον Οx των καμπύλων:

α) $f(x)=\sin x,\ 0\leq x\leq\pi$

β) $y^2=4ax,\ 0\leq x\leq 3a$

γ) $x=a\cos^3 t,\ y=a\sin^3 t,\ 0\leq t\leq 2\pi$

δ) $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t),\ 0\leq t\leq 2\pi$

ε) $x=e^t\sin t,\ y=e^t\cos t,\ 0\leq t\leq\frac{\pi}{2}$

στ) $r=a(1+\cos\theta),\ a>0$

2.66. Να βρεθεί ο όγκος από περιστροφή γύρω από τον άξονα Οx των καμπύλων:

α) $f(x)=x^{-1/2}\log x,\ 1\leq x\leq 2$

β) $f(x)=\sqrt{\frac{2+x}{x^2+4x}},\ 1\leq x\leq 2$

γ) $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t),\ 0\leq t\leq 2\pi$

δ) $r=\cos\theta$

2.67. Ένα τόξο της αλυσοειδούς $y=a\cosh\frac{x}{a}$ με άκρα τα σημεία με τετμημένες 0 και x στρέφεται γύρω από τον άξονα Οx. Να αποδείξετε ότι: $aB=2V$.

2.68. Να βρεθεί το εμβαδό της επιφάνειας του ελλειψοειδούς, που προκύπτει από περιστροφή γύρω από τον άξονα Οx της έλλειψης $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1,\ a>\beta$.

§ 2.11. ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ

Το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού (Θεώρημα 2.19) μας δίνει μια εύκολη μέθοδο υπολογισμού ορισμένων ολοκληρωμάτων, μόνο αν μπορούμε να βρούμε μια αρχική για την ολοκληρωτέα συνάρτηση. Όταν δεν μπορούμε να βρούμε μια αρχική, τότε το Θεώρημα 2.19 δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί. Για τέτοιες περιπτώσεις υπάρχει μια μεγάλη ποικιλία μεθόδων με τις οποίες μπορούμε να προσεγγίσουμε την τιμή του ολοκληρώματος. Μερικές τέτοιες μεθόδους έχουμε κιόλας δει. Για παράδειγμα από το Πόρισμα του Θεωρήματος 2.14 έχουμε ότι αν $g(x)\leq f(x)\leq h(x),\ \forall x\in[a,\beta]$ τότε $\int_a^\beta g(x)dx\leq\int_a^\beta f(x)dx\leq\int_a^\beta h(x)dx$. Αν τα ολοκληρώματα των g και h μπορούν να υπολογιστούν εύκολα, τότε έχουμε και μια προσέγγιση της τιμής του ολοκληρώματος της f. Έτσι, για το ολοκλήρωμα $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ (που δεν μπορεί να υπολογστεί στοιχειωδώς, § 1.9) έχουμε ότι:

$$\int_0^1 e^{-x}dx\leq\int_0^1 e^{-x^2}dx\leq\int_0^1 1\cdot dx$$

(αφού $e^{-x}\leq e^{-x^2}\leq 1,\ \forall x\in[0,1]$). Δηλαδή

$$1-\frac{1}{e}\leq\int_0^1 e^{-x^2}dx\leq 1$$

Επίσης ο τύπος του Taylor μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να προσεγγίσουμε την e^{-x^2} με ένα πολυώνυμο. Έτσι έχουμε:

$$e^{-x^2}=1-x^2+\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{6}x^6+R_3(x)$$

όπου $R_3(x)=\frac{x^8}{24}e^{-\xi^2},\ 0<\xi<1$. Συνεπώς

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx = \int_0^1 \left(1-x^2+\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{6}x^6\right)dx + \int_0^1 R_3(x)dx$$

$$= 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{10}-\frac{1}{42}+\int_0^1 R_3(x)dx$$

Αφού $\int_0^1 R_3(x)dx \leqslant \int_0^1 \frac{x^8}{24}dx \leqslant \frac{1}{9\cdot 24} < 0{,}005$ έχουμε τελικά ότι $\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx \frac{26}{35}$ με σφάλμα μικρότερο του 0,005.

Ακόμα η ανισότητα των Cauchy-Schwarz ή τα Θεωρήματα Μέσης Τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να βρούμε προσεγγιστική τιμή για ένα ολοκλήρωμα (Παράδειγμα 2.19 και Εφαρμογή 2 της § 2.8). Για παράδειγμα, αν $I=\int_0^1 \sqrt{1+x^4}dx$ τότε από το Πόρισμα του θεωρήματος 2.23 έχουμε ότι:

$$I=\int_0^1 \sqrt{1+x^4}dx = \sqrt{1+\xi^4}, \quad 0 \leqslant \xi \leqslant 1$$

Επειδή όμως $1 < \sqrt{1+\xi^4} < \sqrt{2}$ θα έχουμε: $1 < I < \sqrt{2}$. Εξάλλου για το ίδιο ολοκλήρωμα από την ανισότητα των Cauchy-Schwarz έχουμε:

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^4}dx < \sqrt{\int_0^1 (1+x^4)dx \cdot \int_0^1 1^2 dx} = \sqrt{1,2}$$

μια πιο καλή προσέγγιση.

Σ'αυτή την παράγραφο θα ασχοληθούμε με δυο πολύ βασικές μεθόδους προσεγγιστικής ολοκλήρωσης. Την μέθοδο του Τραπεζίου και την μέθοδο του Simpson.

A) Μέθοδος του τραπεζίου

Η μέθοδος αυτή στηρίζεται στην προσέγγιση μιας συνεχούς συναρτήσεως $f:[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ από μια κατά τμήματα γραμμική συνάρτηση*. Ας υποθέσουμε ότι η f είναι θετική. Τότε μια

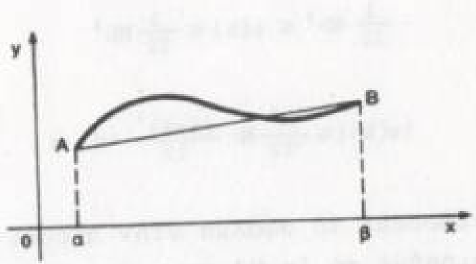
---

* Μια συνάρτηση $f:I=[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ θα λέγεται κ α τ ά τ μ ή μ α τ α γ ρ α μ μ ι κ ή στο I, αν το I είναι ένωση πεπερασμένου αριθμού διαστημάτων $I_1, I_2, \ldots, I_k$ τέτοιων ώστε ο περιορισμός της f σε κάθε διάστημα I_μ, $\mu=1,2,\ldots,k$ να είναι γραμμική συνάρτηση.

πρώτη προσέγγιση στο ολοκλήρωμα $I=\int_\alpha^\beta f(x)dx$ είναι η

$$T_1(f) = \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}(\beta-\alpha)$$

δηλ. το εμβαδό του τραπεζίου αΑΒβ (Σχήμα 2.26).



Σχήμα 2.26.

Υποθέτοντας ότι η f έχει δεύτερη παράγωγο φραγμένη στο [α,β], μπορούμε να βρούμε ένα άνω φράγμα στο σφάλμα που κάνουμε σ'αυτήν την προσέγγιση σύμφωνα με το επόμενο:

Θεώρημα 2.30. Αν οι f, f' και f'' είναι συνεχείς στο [α,β] με $|f''(x)| \leqslant M$, $\forall x \in [\alpha,\beta]$ τότε:

$$\left| \int_\alpha^\beta f(x)dx - T_1(f) \right| \leqslant \frac{(\beta-\alpha)^3}{12} M$$

Απόδειξη

Θέτουμε $h=\beta-\alpha$ και θεωρούμε την συνάρτηση: $\varphi:[0,h] \to \mathbb{R}$ με $\varphi(x)=\int_\alpha^{\alpha+x} f(t)dt - \frac{1}{2}x[f(\alpha)+f(\alpha+x)]$. Έχουμε: $\varphi(0)=0$ και

$$\varphi'(x) = f(\alpha+x) - \frac{1}{2}[f(\alpha)+f(\alpha+x)] - \frac{1}{2}xf'(\alpha+x)$$

$$\varphi''(x) = f'(\alpha+x) - \frac{1}{2}f'(\alpha+x) - \frac{1}{2}f'(\alpha+x) - \frac{1}{2}xf''(\alpha+x) = -\frac{1}{2}xf''(\alpha+x)$$

Αφού $|f''(x)| \leqslant M$, $\forall x \in [\alpha,\beta]$ θα έχουμε:

$$-\frac{1}{2}Mx \leqslant \varphi''(x) \leqslant \frac{1}{2}Mx$$

Ολοκληρώνοντας από 0 μέχρι x, και λαμβάνοντας υπόψη ότι $\varphi'(0)=0$, έχουμε:

$$-\frac{1}{4}Mx^2 \leq \varphi'(x) \leq \frac{1}{4}Mx^2,\ 0 \leq x \leq h$$

Ολοκληρώνοντας ξανά και χρησιμοποιώντας την $\varphi(0)=0$ έχουμε:

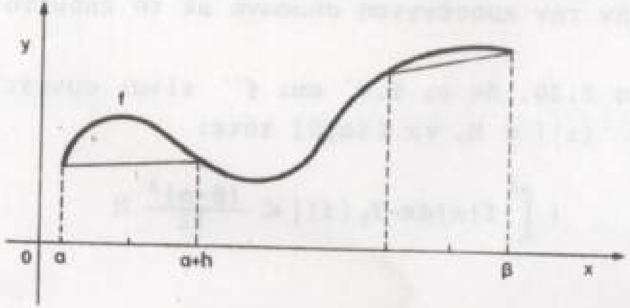
$$-\frac{1}{12}Mh^3 \leq \varphi(h) \leq \frac{1}{12}Mh^3$$

ή

$$|\varphi(h)| \leq \frac{h^3}{12}M = \frac{(\beta-\alpha)^3}{12}\cdot M. \ \blacksquare$$

Για να βελτιώσουμε το σφάλμα στην προσέγγιση του θεωρήματος 2.30 διαιρούμε το $[\alpha,\beta]$ σε ν ισα υποδιαστήματα μήκους $h=\frac{\beta-\alpha}{\nu}$ δηλ. παίρνουμε την ακολουθία διαμερίσεων

$$P_\nu=\{\alpha,\alpha+h,\ldots,\alpha+\nu h=\beta\}$$



Σχήμα 2.27.

Προσεγγίζουμε την f από μια κατά τμήματα γραμμική συνάρτηση που περνάει από τα σημεία $(\alpha+kh, f(\alpha+kh)), k=0,1,\ldots,\nu$ (Σχήμα 2.27). Η προσεγγιστική τιμή θα είναι τότε:

$$T_\nu(f)=\frac{f(\alpha)+f(\alpha+h)}{2}\cdot h+\frac{f(\alpha+h)+f(\alpha+2h)}{2}\cdot h+\cdots+\frac{f(\alpha+(\nu-1)h)+f(\beta)}{2}\cdot h$$

$$=h\left[\frac{1}{2}f(\alpha)+f(\alpha+h)+\cdots+f(\alpha+(\nu-1)h)+\frac{1}{2}f(\beta)\right]$$

$$=h\left[\frac{1}{2}f(\alpha)+\sum_{k=1}^{\nu-1}f(\alpha+kh)+\frac{1}{2}f(\beta)\right]$$

Το $T_\nu(f)$ λέγεται ν-οστή τραπεζοειδής προσέγγιση της f στο $[\alpha,\beta]$. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 2.30 σε κάθε τμήμα της P_ν έχουμε ότι το σφάλμα είναι το πολύ $\frac{1}{12}M\frac{(\beta-\alpha)^3}{\nu^2}$.

Πόρισμα: Αν οι f, f' και f'' είναι συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$, και $|f''(x)| \leq M,\ \forall x\in[\alpha,\beta]$, τότε:

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)dx-T_\nu(f)\right| \leq \frac{(\beta-\alpha)^3}{12\nu^2}M$$

Παράδειγμα 2.38.

Ας θεωρήσουμε το ολοκλήρωμα $\int_0^1\sqrt{1+x^4}\,dx$. Αυτό είναι διωνυμικό ολοκλήρωμα και δεν υπολογίζεται στοιχειωδώς. Θα το υπολογίσουμε προσεγγιστικά, υπολογίζοντας το $T_{10}(f)$ με $f(x)=\sqrt{1+x^4}$. Διαιρούμε το διάστημα $[0,1]$ σε 10 ίσα μέρη. Τότε $x_1=\frac{1}{10}$, $x_2=\frac{2}{10},\ldots,x_9=\frac{9}{10}$, $x_{10}=1$ και βρίσκουμε:

$f(0)=1$, $f(x_1)=1.00005$, $f(x_2)=1.00080$, $f(x_3)=1.00404$

$f(x_4)=1.01272$, $f(x_5)=1.03078$, $f(x_6)=1.06283$,

$f(x_7)=1.11360$, $f(x_8)=1.18727$, $f(x_9)=1.28690$, $f(x_{10})=1.41421$.

Έτσι $T_{10}(f)=\frac{1}{20}[f(0)+2f(x_1)+\cdots+2f(x_9)+f(1)]=1.09061$. Για να βρούμε το σφάλμα σ' αυτήν την προσέγγιση, αρκεί να βρούμε το $\sup f''(x)$, $x\in[0,1]$ και να εφαρμόσουμε το Πόρισμα του Θεωρήματος 2.30. Είναι $f''(x)=2x^2(3+x^4)(1+x^4)^{-3/2}$ και $|f''(x)| \leq 2\sqrt{2},\ \forall x\in[0,1]$. Συνεπώς

$$\left|\int_0^1\sqrt{1+x^4}\,dx-T_{10}(f)\right| \leq \frac{2\sqrt{2}}{12\cdot 10} \approx 0.002357$$

Αυτό σημαίνει ότι $\int_0^1\sqrt{1+x^4}\,dx=1.09061\pm0.002357$

Β) Μέθοδος ή κανόνας του Simpson

Η προσεγγιστική μέθοδος με την οποία θα ασχοληθούμε τώρα, συνήθως δίνει καλύτερη προσέγγιση από αυτήν που δίνει η μέθοδος του Τραπεζίου. Με την μέθοδο του Τραπεζίου προ-

σεγγίσαμε την f με πολυώνυμα πρώτου βαθμού. Με την μέθοδο του Simpson που θα αναφέρουμε τώρα, βελτιώνουμε αυτή την προσέγγιση θεωρώντας πολυώνυμα δεύτερου βαθμού. Πριν δώσουμε τον κανόνα του Simpson, ας δώσουμε το παρακάτω

Λήμμα: Αν $p(x)=Ax^2+Bx+\Gamma$ τότε

$$\int_\alpha^\beta p(x)dx=\frac{\beta-\alpha}{6}\left[p(\alpha)+4p\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+p(\beta)\right] \tag{1}$$

Απόδειξη

Έχουμε:

$$\int_\alpha^\beta p(x)dx=\left[\frac{Ax^3}{3}+\frac{Bx^2}{2}+\Gamma x\right]_\alpha^\beta=\frac{A(\beta^3-\alpha^3)}{3}+\frac{B(\beta^2-\alpha^2)}{2}+\Gamma(\beta-\alpha)$$

$$=\frac{\beta-\alpha}{6}\,[2A(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)+3B(\alpha+\beta)+6\Gamma]$$

$$=\frac{\beta-\alpha}{6}\left[(A\alpha^2+B\alpha+\Gamma)+4\left\{A\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2+B\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+\Gamma\right\}+(A\beta^2+B\beta+\Gamma)\right]$$

$$=\frac{\beta-\alpha}{6}\left[P(\alpha)+4P\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+P(\beta)\right] \blacksquare$$

Ειδικά $$\int_{-h}^{h} p(x)dx=\frac{1}{3}h\{f(-h)+4f(0)+f(h)\} \tag{2}$$

Ο τύπος (1) ή (2) λέγεται **τύπος του Simpson**. Ο τύπος αυτός εφαρμόζεται για να προσεγγίσουμε ένα ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ όπου f είναι μια οποιαδήποτε συνάρτηση και όχι κατ' ανάγκη πολυώνυμο δευτέρου βαθμού.

Για να πάρουμε ένα άνω φράγμα για το σφάλμα στην προσέγγιση του ολοκληρώματος με τον τύπο (2) θα υποθέσουμε ότι η f έχει τέταρτη παράγωγο φραγμένη.

Θεώρημα 2.31. Υποθέτουμε ότι $|f^{(4)}(x)|\leq M$, $\forall x\in[\alpha,\beta]$. Τότε:

$$\left|\int_{-h}^{h} f(x)dx-\frac{1}{3}h\{f(-h)+4f(0)+f(h)\}\right|\leq\frac{1}{90}Mh^5$$

Απόδειξη

Θέτουμε $F(x)=\int_{-x}^{x} f(t)dt-\frac{1}{3}x\{f(-x)+4f(0)+f(x)\}$, $0\leq x\leq h$. Τότε:

$$F'(x)=f(x)+f(-x)-\frac{1}{3}\{f(-x)+4f(0)+f(x)\}-\frac{1}{3}x\{f'(x)-f'(-x)\}$$

$$=\frac{2}{3}f(x)-\frac{4}{3}f(0)+\frac{2}{3}f(-x)-\frac{1}{3}x\{f'(x)-f'(-x)\}$$

$$F''(x)=\frac{1}{3}f'(x)-\frac{1}{3}f'(-x)-\frac{1}{3}x\{f''(x)+f''(-x)\}$$

$$F'''(x)=\frac{-1}{3}x\{f'''(x)-f'''(-x)\}$$

$$=-\frac{2}{3}x^2f^{(4)}(\xi),\ -x<\xi<x$$

από το θεώρημα της Μέσης τιμής του Διαφορικού Λογισμού. Άρα:

$$-\frac{2}{3}Mx^2\leq F'''(x)\leq\frac{2}{3}Mx^2$$

Ολοκληρώνοντας από 0 μέχρι x και λαμβάνοντας υπόψη ότι $F''(0)=0$ θα έχουμε:

$$-\frac{2}{9}Mx^3\leq F''(x)\leq\frac{2}{9}Mx^3$$

Ολοκληρώνοντας δυο φορές ακόμα, αφού $F'(0)=F(0)=0$ θα έχουμε:

$$-\frac{1}{18}Mx^4\leq F'(x)\leq\frac{1}{18}Mx^4,\ 0\leq x\leq h$$

και

$$-\frac{1}{90}Mh^5\leq F(h)\leq\frac{1}{90}Mh^5$$

δηλ.

$$|F(h)|\leq\frac{1}{90}Mh^5 \blacksquare$$

Έστω τώρα γενικά $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση. Θεωρούμε μια διαμέριση του $[\alpha,\beta]$ χωρίζοντας το $[\alpha,\beta]$ σε 2ν υποδιαστήματα πλάτους h, δηλ. β-α=2νh. Σε κάθε διπλό υποδιάστημα [α,α+2h], [α+2h, α+4h],...,[β-2h,β] προσεγγίζουμε την f από πολυώνυμο δεύτερου βαθμού, που ταυτίζεται με την f στα σημεία

$$y_0=f(\alpha),\ y_1=f(\alpha+h),\ y_2=f(\alpha+2h),\ldots$$

Εφαρμόζοντας το Λήμμα σε κάθε τέτοιο διπλό υποδιάστημα παίρνουμε την ν-οστή προσέγγιση του Simpson:

$$S_\nu(f)=\frac{1}{3}h\{(y_0+y_{2\nu})+4(y_1+y_3+\cdots+y_{2\nu-1})+2(y_2+y_4+\cdots+y_{2\nu-2}\}$$

$$=\frac{1}{3}h\{[f(\alpha)+f(\beta)]+4[f(\alpha+h)+f(\alpha+3h)+\cdots+f(\alpha+(2\nu-1)h)]+2[f(\alpha+2h)+f(\alpha+4h)+\cdots+f(\alpha+(2\nu-2)h)]\}$$

Εξάλλου εφαρμόζοντας το Θεώρημα 2.31, με την προϋπόθεση ότι $|f^{(4)}(x)|\leq M,\ \forall x\in[\alpha,\beta]$ βλέπουμε ότι το σφάλμα σ' αυτήν την προσέγγιση είναι το πολύ

$$\frac{1}{90}M\cdot\nu\left(\frac{\beta-\alpha}{2\nu}\right)^5=\frac{1}{2880}M\frac{(\beta-\alpha)^5}{\nu^4}$$

Έτσι έχουμε:

Πόρισμα: Αν οι f, f', f'', f''' και $f^{(4)}$ είναι συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$ και $|f^{(4)}(x)|\leq M,\ \forall x\in[\alpha,\beta]$, τότε:

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)dx-S_\nu(f)\right|\leq\frac{(\beta-\alpha)^5}{2880\nu^4}M$$

Παράδειγμα 2.39.

Ας θεωρήσουμε πάλι το ολοκλήρωμα του παραδείγματος 2.38. δηλ. $I=\int_0^1\sqrt{1+x^4}dx$ και ας το προσεγγίσουμε με τον κανόνα του Simpson. Έχουμε:

$$S_{10}(f)=\frac{1}{30}\left[f(0)+4\left\{f\left(\frac{1}{10}\right)+f\left(\frac{3}{10}\right)+f\left(\frac{5}{10}\right)+f\left(\frac{7}{10}\right)+f\left(\frac{9}{10}\right)\right\}+2\left\{f\left(\frac{2}{10}\right)+f\left(\frac{4}{10}\right)+f\left(\frac{6}{10}\right)+f\left(\frac{8}{10}\right)\right\}+f(1)\right]$$

$$=\frac{32.68473}{30}=1.08949$$

Για να βρούμε το σφάλμα σ' αυτήν την προσέγγιση, σύμφωνα με το Πόρισμα του Θεωρήματος 2.31, αρκεί να βρούμε το $\sup f^{(4)}(x),\ x\in[0,1]$. Επειδή

$$f^{(4)}(x)=12(1-14x^4+5x^8)(1+x^4)^{-7/2}$$

θα έχουμε:

$$M=\max_{x\in[0,1]}|f^{(4)}(x)|\leq 15\sqrt{2}$$

Συνεπώς

$$\left|\int_0^1\sqrt{1+x^4}-S_{10}(f)\right|\leq\frac{1}{2880\cdot 5^4}\cdot 15\sqrt{2}<0,.00002$$

και

$$I=1.08949\pm 0.00002$$

Έτσι βλέπουμε ότι ο τύπος του Simpson δίνει με μεγαλύτερη ακρίβεια την τιμή του ολοκληρώματος, από ότι η μέθοδος του τραπεζίου.

§ 2.12. ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 2

Σωστό ή λάθος;

1. Αν η $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ είναι φθίνουσα στο $[\alpha,\beta]$, τότε η ελάχιστη τιμή της είναι η $f(\beta)$.

2. Αν η λεπτότητα διαμερίσεως τείνει στο 0, τότε ο αριθμός των υποδιαστημάτων της διαμέρισης τείνει στο $+\infty$.

3. $\int_1^1 x dx=\lim\limits_{\nu\to+\infty}\sum_{k=1}^{\nu}\left(-1+\frac{2k}{\nu}\right)\cdot\frac{2}{\nu}=0$

4) Κάθε ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann.

5) $\int_0^1 x^3dx < \int_0^1 \sqrt{x}dx$

6) Αν $f:[-\alpha,\alpha] \to \mathbb{R}$ είναι τέτοια ώστε: $f(x)=-f(-x), \forall x \in [-\alpha,\alpha]$ τότε:

$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx=0$

7) $\int_{-1}^{1} (\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta)dx=2\int_0^1 (\beta x^2+\delta)dx$

8) $\int_{-\alpha}^{\alpha} \sin x f(\cos x)dx=0$

9) $\int_{-\alpha}^{\alpha} \cos x \cdot f(x^2)dx=2\int_0^{\alpha} \cos x \cdot f(x^2)dx$

10) $\int_0^{\beta} \sin x dx=\int_{\alpha}^{\beta+2\pi} \sin x dx$

11) $\int_0^{\pi} \frac{\sin 2kx}{\sin x} dx=0,, \; k \in \mathbb{Z}$

12) $\int_{-1}^{1} \sqrt{x^2-x^3}dx=\int_{-1}^{1} x\sqrt{1-x}dx$

13) Αν $F'(x)=f(x), x \in [0,\alpha]$ τότε $\int_0^{\alpha} f(x)dx=F(\alpha)$

14) $\int_{-1}^{1} xf(x)dx=0$ με f συνεχή γιατί από το θεώρημα 2.23 με $g(x)=x$ έχουμε: $\int_{-1}^{1} xf(x)dx=f(\xi)\int_{-1}^{1} xdx=0$

15) $\int_{2\pi}^{4\pi} \frac{\sin x}{x} dx=0$ γιατί από το θεώρημα 2.23 έχουμε:

$\int_{2\pi}^{4\pi} \frac{\sin x}{x} dx=\frac{1}{\xi}\int_{2\pi}^{4\pi} \sin x dx=0$

16) Είναι $\int_{2\pi}^{4\pi} \frac{\sin x}{x} dx>0$ επειδή $\int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin x}{x} dx>\int_{3\pi}^{4\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx$

17) Το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τον κύκλο $r=\sin\theta$ δίνεται από το ολοκλήρωμα $\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin^2\theta d\theta$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

2.69. Να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{2\pi^2}{9} < \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{2x\,dx}{\sin x} < \frac{4\pi^2}{9}$

β) $\frac{1}{2} < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2+x^3}} < \frac{\pi}{6}$

2.70. Αν $0<\delta<\frac{2}{\pi}$ τότε να αποδείξετε ότι: $\left|\int_{\delta}^{2/\pi} \sin\frac{1}{x} dx\right| \le \frac{4}{\pi^2}$

2.71. Αν $f(x) \ge 0$ και $xf'(x)+f(x) \ge 0$ για $0<\alpha \le x \le \beta$, τότε να αποδείξετε ότι:

$$\left|\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\cos(\log x)dx\right| \le 2\beta f(\beta)$$

2.72. Αν $f(\alpha+\beta-x)=f(x)$ τότε να αποδείξετε ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} xf(x)dx=\frac{\alpha+\beta}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$

2.73. Να αποδείξετε ότι:

α) $\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos(\nu x)dx=\frac{4\pi(-1)^{\nu}}{\nu^2}$, $\nu \in \mathbb{N}$

$x=\nu t$

β) $\int_0^{\nu\pi} |\sin x|dx=2\nu$ και $\int_0^{\nu\pi} x|\sin x|dx=\nu^2\pi$, $\nu \in \mathbb{Z}$

2.74. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα των Cauchy - Schwarz, να αποδείξετε ότι: $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{dS}{S} < \frac{\beta-\alpha}{\sqrt{\alpha\beta}}$, $0<\alpha<\beta$

2.75. Να βρεθεί συνάρτηση f συνεχής $\forall x \in \mathbb{R}$ και διάφορη του μηδενός τέτοια ώστε:

$$f^2(x)=\int_0^x f(t)\,\frac{\sin t}{2+\cos t}\,dt$$ ω Απ Τεχνάση στη συνθήκη

2.76. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$G(y)=\int_0^{\alpha}\frac{1-y\cos x}{1-2y\cos x+y^2}\,dx,\quad 0\leqslant y\leqslant 1,\ 0<\alpha<\pi$$

και να αποδείξετε ότι η G δεν είναι συνεχής για y=1.

2.77. Έστω f συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε $f(x)<1$, $\forall x\in[0,1]$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2x-\int_0^x f(t)dt=1$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα [0,1].

2.78. Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β). Αν $f(\alpha)=0$, $f(\beta)=-1$ και $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx=0$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε: $f'(\xi)=0$.

2.79. Θα λέμε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι ορθογώνιες σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$ αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)dx=0$. Να αποδείξετε ότι:

α) Οι συναρτήσεις $\sin mx$ και $\sin kx$ είναι ορθογώνιες σε ένα διάστημα μήκους 2π αν $m,k\in\mathbb{Z}$ και $m^2\neq k^2$.

β) Το ίδιο ισχύει και για τις συναρτήσεις $\cos mx$ και $\cos kx$ καθώς και για τις $\sin mx$ και $\cos kx$, ακόμα και αν $m=k$.

2.80. Οι f και g είναι συνεχείς, θετικές στο $[\alpha,\beta]$ και τέτοιες ώστε $f(x)=\varphi(x)g(x)$, $\forall x\in[\alpha,\beta]$ όπου φ μια αύξουσα συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$. Αν $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ και $G(x)=\int_0^x g(t)dt$, τότε να αποδείξετε ότι: $F(x)\leqslant\varphi(x)G(x)$. Επίσης να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\frac{F}{G}$ είναι αύξουσα στο $[\alpha,\beta]$.

2.81. Να αποδείξετε ότι: $\int_0^{\pi/2} e^{-k\sin x}dx<\frac{\pi}{2k}(1-e^{-k})$, $k>0$

2.82. Να αποδείξετε ότι: $\int_{-1}^{x}\operatorname{sgn}(t)dt=-1+|x|$, $-1\leqslant x\leqslant 1$ όπου sgn η συνάρτηση "πρόσημο του x".

2.83. Έστω $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ με

$$f(x)=\begin{cases} x\ , & 0\leqslant x\leqslant 1\\ x+1, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$$

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη.

2.84. Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ μια αύξουσα συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $F(x)=\int_c^x f(t)dt$, $x\in[\alpha,\beta]$ με c ένα σταθερό σημείο του $[\alpha,\beta]$, είναι κυρτή στο $[\alpha,\beta]$.

2.85. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_0^{2\pi}\sqrt{1-k^2\sin^2 x}\,dx<2\pi\sqrt{1-\frac{1}{2}k^2},\quad 0\leqslant k\leqslant 1$$

2.86. Έστω $I_\nu=\int_0^{2\alpha}x^\nu\sqrt{2\alpha x-x^2}\,dx$. Να αποδείξετε ότι:

α) $3\alpha I_\nu-3I_{\nu+1}=\nu(I_{\nu+1}-2\alpha I_\nu)$

β) $I_\nu=\frac{(2\nu+1)(2\nu-1)\cdots7\cdot5}{(\nu+2)(\nu+1)\cdots5\cdot4}\,\frac{\pi}{2}\cdot\alpha^{\nu+2}$, $\nu\in\mathbb{N}$

2.87. Να αποδείξετε ότι: $\int_0^{\pi}\frac{x}{\alpha^2-\cos^2 x}dx=\frac{\pi^2}{2\alpha\sqrt{\alpha^2-1}}$

2.88. Να βρεθεί η $(f^{-1}(0))'$ αν $f(x)=\int_0^x[1+\sin(\sin t)]dt$

2.89. Να βρεθεί η $f'(x)$ αν

$$f(x)=\int_0^{\int_0^x \frac{1}{1+\sin^2 t}\,dt} \frac{1}{1+\sin^2 t}\,dt$$

2.90. Να αποδείξετε ότι η παραβολή $y^2=x$ διαιρεί τον κύκλο $x^2+y^2=2$ σε δυο μέρη, των οποίων τα εμβαδά έχουν λόγο $\frac{3\pi+2}{9\pi-2}$.

2.91. Να βρεθούν τα μήκη των καμπύλων:

α) $x=\sqrt{3}t^2$, $y=t-t^3$

β) $x=t^2$, $y=\frac{t}{3}(t^2-3)$

μεταξύ των σημείων τομής με τον άξονα Ox.

2.92. Να βρεθούν τα μήκη των καμπύλων:

α) $f(x)=\log x$, $\sqrt{3}\leq x\leq\sqrt{8}$

β) $f(x)=1-\log\cos x$, $0\leq x\leq\frac{\pi}{4}$

γ) $x=at\cos t$, $y=at\sin t$, $0\leq t\leq 1$

2.93. Για ποιά τιμή της θετικής σταθεράς λ, το μήκος τόξου της καμπύλης $y^2=4\lambda x$, $0\leq x\leq\lambda$ και το εμβαδό της επιφάνειας από περιστροφή γύρω από τον άξονα Ox της καμπύλης $y=\sin x$ $0\leq x\leq\pi$ εκφράζονται με τον ίδιο αριθμό;

2.94. Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες $y=\alpha x^2$ και $y=1-\frac{x^2}{\alpha}$, $\alpha>0$ είναι $\frac{4}{3}\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha^2+1}}$. Να βρεθεί η μέγιστη τιμή αυτού του εμβαδού, για τις διάφορες τιμές του α.

2.95. Μια συνάρτηση $g:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ ικανοποιεί τις συνθήκες:

$$g(1)=1 \quad \text{και} \quad g'(x^2)=x^3,\ \forall x>0$$

Να αποδείξετε ότι $g(4)=\frac{67}{5}$

2.96. Αν $f(x)=\frac{\sin x}{x}$, τότε να αποδείξετε ότι:

$$\int_0^{\pi/2} f(x)f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx$$

2.97. Έστω $f,g:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχείς και $g(x)\neq 0$, $\forall x\in(\alpha,\beta)$. Έστω ακόμα οι συναρτήσεις:

$$F(x)=\int_\alpha^x f(t)g(t)dt,\quad G(x)=\int_\alpha^x g(t)dt \quad \text{και}$$

$$H(x)=\begin{vmatrix} F(x) & G(x) & 1\\ F(\alpha) & G(\alpha) & 1\\ F(\beta) & G(\beta) & 1\end{vmatrix},\ \alpha\leq x\leq\beta$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα του Rolle στην H να αποδείξετε το θεώρημα 2.23.

2.98. (Λήμμα Riemann-Lebesque). Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Να αποδείξετε ότι:

i) $\lim\limits_{\nu\to+\infty}\int_\alpha^\beta f(x)\sin\nu x\,dx=0$ ii) $\lim\limits_{\nu\to+\infty}\int_\alpha^\beta f(x)\cos\nu x\,dx=0$.

2.99. Έστω $f:[0,\alpha]\to\mathbb{R}$ μια θετική και αύξουσα συνάρτηση. Να αποδείξετε ότι η $G(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$, $x\in(0,\alpha)$ είναι αύξουσα.

γενικευμένο ολοκλήρωμα 3

§ 3.1. ΓΕΝΙΚΑ

Στο προηγούμενο Κεφάλαιο μελετήσαμε το ολοκλήρωμα του Riemann ή το ορισμένο ολοκλήρωμα, κάτω από τις συνθήκες ότι οι συναρτήσεις που θεωρούσαμε ήταν φραγμένες και το διάστημα ολοκλήρωσης ήταν κλειστό και φραγμένο. Όταν μια από αυτές τις συνθήκες δεν ικανοποιείται, τότε η προηγούμενη θεωρία δεν μπορεί να εφαρμοστεί χωρίς κάποια αλλαγή. Υπάρχει μια ευρεία κλάση συναρτήσεων για τις οποίες μια ή και οι δυο από τις υποθέσεις δεν πληρούνται, αλλά μπορούμε να ορίσουμε ένα ολοκλήρωμα που να υπακούει σε όλους τους γνωστούς κανόνες. Τέτοια ολοκληρώματα λέγονται **γενικευμένα ολοκληρώματα**.

Αν ένα ή και τα δυο άκρα ολοκλήρωσης είναι άπειρα και η f είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε υποδιάστημα του διαστήματος ολοκλήρωσης, τότε το ολοκλήρωμα λέγεται **γενικευμένο ολοκλήρωμα α΄ είδους**. Αν το διάστημα ολοκλήρωσης είναι πεπερασμένο, αλλά η συνάρτηση δεν είναι φραγμένη σ'αυτό, τότε το ολοκλήρωμα λέγεται **γενικευμένο ολοκλήρωμα β΄ είδους**. Αν συμβαίνουν και τα δυο, δηλαδή το διάστημα ολοκλήρωσης είναι απέραντο και η συνάρτηση δεν είναι φραγμένη, τότε το ολοκλήρωμα λέγεται **γενικευμένο ολοκλήρωμα μικτού είδους**.

Στο Κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε αναλυτικά αυτά τα ολοκληρώματα ως προς την σύγκλισή τους ή όχι. Τα κριτήρια για

την σύγκλιση ή όχι των γενικευμένων ολοκληρωμάτων είναι ανάλογα με αυτά που εξετάσαμε στις σειρές πραγματικών αριθμών.

§ 3.2. ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ Α΄ ΕΙΔΟΥΣ

Πριν δώσουμε τον Ορισμό του γενικευμένου ολοκληρώματος α΄ είδους, θα δώσουμε πρώτα τον ακόλουθο

Ορισμός: 3.1. Θα λέμε ότι η συνάρτηση $f: I \to \mathbb{R}$ είναι τοπικά ολοκληρώσιμη στο διάστημα I, αν αυτή είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε πεπερασμένο κλειστό υποδιάστημα του I.

Παράδειγμα 3.1.

Η συνάρτηση $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ με

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & 0<x\leq 1 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

δεν είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$, αφού δεν είναι φραγμένη. Όμως για κάθε α, με $0<\alpha<1$ η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha,1]$. Άρα η f είναι τοπικά ολοκληρώσιμη στο $I=[0,1]$.

Παράδειγμα 3.2.

Η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x(x-1)}$, $x \neq 0,1$ είναι τοπικά ολοκληρώσιμη στα διαστήματα $(-\infty,0)$, $(0,1)$ και $(1,+\infty)$.

Ορισμός 3.2. Έστω $f:[\alpha,+\infty)$ μια τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τότε ορίζουμε το γενικευμένο ολοκλήρωμα της f απ το α ως το $+\infty$ να είναι:

$$\int_{\alpha}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\beta\to+\infty} \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$

αν το όριο υπάρχει. Σ' αυτή την περίπτωση λέμε ότι το γενι κευμένο ολοκλήρωμα της f υπάρχει ή συγκλίνει. Αν το όριο είναι το $+\infty$, τότε λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα απειρίζεται θετικά, ενώ λέμε ότι απειρίζεται αρνητικά, αν το όριο είναι το $-\infty$. Αν το όριο δεν υπάρχει τότε λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα της f δεν συγκλίνει ή δεν υπάρχει ή αποκλίνει.

Ορισμός 3.3: Έστω $f: (-\infty,\beta] \to \mathbb{R}$ μια τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τότε ορίζουμε το γενικευμένο ολοκλήρωμα της f από το $-\infty$ ως το β να είναι:

$$\int_{-\infty}^{\beta} f(x)dx = \lim_{\alpha\to-\infty}\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$

αν το όριο υπάρχει. Όπως και στον Ορισμό 3.2 λέμε τότε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα της f υπάρχει ή συγκλίνει. Αν το όριο δεν υπάρχει λέμε ότι αποκλίνει, αν είναι $+\infty$ τότε λέμε ότι απειρίζεται θετικά και αν είναι το $-\infty$, τότε λέμε ότι απειρίζεται αρνητικά.

Ορισμός 3.4: Έστω $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τότε ορίζουμε το γενικευμένο ολοκλήρωμα της f από το $-\infty$ ως το $+\infty$ να είναι:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\gamma}^{+\infty} f(x)dx$$

$$= \lim_{\alpha\to-\infty}\int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx + \lim_{\beta\to+\infty}\int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx$$

αν τα όρια υπάρχουν.

Παράδειγμα 3.3.

Το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$ υπάρχει. Πραγματικά η συνάρτηση $f(x)=e^{-x}$ είναι τοπικά ολοκληρώσιμη στο $[0,+\infty)$ και από τον Ορισμό 3.2 έχουμε:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}dx=\lim_{\beta\to+\infty}\int_0^{\beta} e^{-x}dx=\lim_{\beta\to+\infty}(1-e^{-\beta})=1$$

Παράδειγμα 3.4.

Το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty}\sin x dx$ αποκλίνει. Πραγματικά επειδή

$$\int_0^{+\infty}\sin x dx=\lim_{\beta\to+\infty}\int_0^{\beta}\sin x dx=\lim_{\beta\to+\infty}(1-\cos\beta)$$

και το $\lim_{\beta\to+\infty}\cos\beta$ δεν υπάρχει, συνεπάγεται ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα αποκλίνει.

Παράδειγμα 3.5.

Είναι $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}=+\infty$. Πραγματικά έχουμε:

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{\beta\to+\infty}\int_1^{\beta}\frac{dx}{x}=\lim_{\beta\to+\infty}\log\beta=+\infty$$

Παράδειγμα 3.6.

Είναι $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\pi$ αφού

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{\alpha\to-\infty}\int_{\alpha}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\lim_{\beta\to+\infty}\int_0^{\beta}\frac{dx}{1+x^2}$$

$$=\lim_{\alpha\to-\infty}(-\mathrm{Artg}\alpha)+\lim_{\beta\to+\infty}(\mathrm{Artg}\beta)=-\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}=\pi$$

Παρατήρηση 3.1.

Αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{+\infty} f(x)dx$ συγκλίνει, τότε γράφουμε $\int_{\alpha}^{+\infty} f(x)dx<+\infty$.

Θεώρημα 3.1. Υποθέτουμε ότι τα γενικευμένα ολοκληρώματα $\int_{\alpha}^{+\infty} f(x)dx$ και $\int_{\alpha}^{+\infty} g(x)dx$ συγκλίνουν και ότι λ και μ είναι πραγματικοί αριθμοί. Τότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{+\infty}[\lambda f(x)+\mu g(x)]dx$ επίσης συγκλίνει και μάλιστα ισχύει:

$$\int_a^{+\infty} \{\lambda f(x)+\mu g(x)\}dx=\lambda \int_a^{+\infty} f(x)dx+\mu \int_a^{+\infty} g(x)dx$$

Απόδειξη

Για τυχαίο $t\in[a,+\infty)$ έχουμε:

$$\int_a^t \{\lambda f(x)+\mu g(x)\}dx=\lambda\int_a^t f(x)dx+\mu\int_a^t g(x)dx$$

Παίρνοντας τα όρια για $t\to+\infty$ έχουμε το ζητούμενο. ■

Παρατήρηση 3.2.

Το θεώρημα 3.1 ισχύει και στην περίπτωση που το διάστημα ολοκλήρωσης είναι το $(-\infty,\beta]$ ή ακόμα και το $(-\infty,+\infty)$. Επίσης ισχύει και στην περίπτωση που θεωρούμε τα όρια στο $\mathbb{R}^*$, με την προϋπόθεση ότι ορίζονται επιτρεπτές πράξεις στα όρια.

Έτσι λοιπόν για τον υπολογισμό γενικευμένων ολοκληρωμάτων μπορούμε να εφαρμόζουμε όλες τις ιδιότητες των ορισμένων ολοκληρωμάτων, οι οποίες μεταφέρονται εδώ εφαρμόζοντας μόνο τις ιδιότητες του ορίου συναρτήσεως. Έτσι μπορούμε να κάνουμε αλλαγή μεταβλητής, να ολοκληρώσουμε κατά παράγοντες κ.τ.λ. Για παράδειγμα εύκολα μπορούμε να δούμε ότι:

$$\int_a^{+\infty} f(x)g'(x)dx=\lim_{\beta\to+\infty} f(\beta)g(\beta)-f(a)g(a)-\int_a^{+\infty} f'(x)g(x)dx$$

Παράδειγμα 3.7.

Ας θεωρήσουμε το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_3^{+\infty}\frac{dx}{x^2+x-2}$$

Αναλύοντας την συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x^2+x-2}$ σε απλά κλάσματα έχουμε:

$$\frac{1}{x^2+x-2}=-\frac{1}{3(x+2)}+\frac{1}{3(x-1)} \qquad (1)$$

Προφανώς τα γενικευμένα ολοκληρώματα $\int_3^{+\infty}\frac{dx}{x+2}$ και $\int_3^{+\infty}\frac{dx}{x-1}$ απειρίζονται θετικά. Συνεπώς η ισότητα

$$\int_3^{+\infty}\frac{dx}{x^2+x-2}=-\frac13\int_3^{+\infty}\frac{dx}{x+2}+\frac13\int_3^{+\infty}\frac{dx}{x-1}$$

δεν είναι σωστή. Το σωστό είναι να ολοκληρώσουμε την (1) από 3 μέχρι τ β και να μετασχηματίσουμε το αποτέλεσμα του β' μέλους στην μορφή:

$$\int_3^{\beta}\frac{dx}{x^2+x-2}=-\frac13\int_3^{\beta}\frac{dx}{x+2}+\frac13\int_3^{\beta}\frac{dx}{x-1}=\frac13\log\frac52\cdot\frac{\beta-1}{\beta+2}$$

Παίρνοντας τώρα τα όρια όταν $\beta\to+\infty$ έχουμε:

$$\int_3^{+\infty}\frac{dx}{x^2+x-2}=\frac13\log\frac52$$

Παρατήρηση 3.3.

Έστω ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[a,+\infty)$ κα μη αρνητική. Τότε από γεωμετρική σκοπιά το γενικευμένο ολοκλήρω $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ παριστάνει το εμβαδό του μη φραγμένου χωρίου, που περικλεί ται από το γράφημα της f, τον άξονα Ox και την ευθεία x=a.

Παρατήρηση 3.4.

Προσοχή χρειάζεται στην εφαρμογή του Ορισμού 3.4. Το γενικευμέ ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ δεν ορίζεται να είναι το όριο $\lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a} f(x)dx$. Π πει να υπάρχουν χωριστά τα όρια $\lim_{a\to-\infty}\int_a^{\gamma} f(x)dx$ και $\lim_{\beta\to+\infty}\int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx$. Μ ρεί να τύχει κανένα από τα όρια αυτά να μην υπάρχει, αλλά το ό $\lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a} f(x)dx$ να υπάρχει. Τότε έχουμε τον ακόλουθο

Ορισμός 3.5. Θα λέμε "πρωτεύουσα τιμή κατά Cauchy" (P.V) του γενικευμένου ολοκληρώματος $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ την τιμή τ ορίου $\lim_{t\to+\infty}\int_{-t}^{t} f(t)dt$, αν αυτό υπάρχει. Θα την συμβολίζουμε

C·P·V $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$, δηλ.

$$C\cdot P\cdot V\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\lim_{x\to+\infty}\int_{-x}^{x} f(t)dt$$

Θεώρημα 3.2. Έστω f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τότε:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\ell \Rightarrow C\cdot P\cdot V\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\ell$$

Το αντίστροφο δεν ισχύει.

Απόδειξη

Αφού $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\ell$, από τον Ορισμό 3.4 συνεπάγεται ότι τα γενικευμένα ολοκληρώματα $\int_{-\infty}^{0} f(x)dx$ και $\int_{0}^{+\infty} f(x)dx$ συγκλίνουν. Τότε έχουμε:

$$\ell=\int_{-\infty}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{+\infty} f(x)dx=\lim_{x\to+\infty}\int_{-x}^{0} f(t)dt+\lim_{x\to+\infty}\int_{0}^{x} f(t)dt$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\int_{-x}^{0} f(t)dt+\int_{0}^{x} f(t)dt\right]=\lim_{x\to+\infty}\int_{-x}^{x} f(t)dt=C\cdot P\cdot V\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

Το ότι δεν ισχύει το αντίστροφο, μπορούμε να το διαπιστώσουμε με ένα παράδειγμα. Έχουμε:

$$C\cdot P\cdot V\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx=\lim_{x\to+\infty}\int_{-x}^{x} \sin t dt=\lim_{x\to+\infty}(\cos x-\cos x)=0$$

δηλ. η πρωτεύουσα τιμή κατά Cauchy υπάρχει, αλλά το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx$ αποκλίνει (Παράδειγμα 3.4). ■

Παρατήρηση 3.5.

Αν η συνάρτηση f είναι περιττή (δηλ. $f(-x)=-f(x)$) ορισμένη στο $(-\infty,+\infty)$ τότε η πρωτεύουσα τιμή πάντα υπάρχει και είναι 0, αφού

$$C\cdot P\cdot V\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\lim_{x\to+\infty}\int_{-x}^{x} f(t)dt=0$$

(από την άσκηση 2.38α).

Αν η συνάρτηση f είναι άρτια (δηλ. $f(-x)=f(x)$) ορισμένη στο $(-\infty,+\infty)$ τότε από την άσκηση 2.38α έχουμε ότι:

$$\int_{-x}^{x} f(t)dt=2\int_{0}^{x} f(t)dt=2\int_{-x}^{0} f(t)dt$$

Συνεπώς, αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ μιας άρτιας συναρτήσεως αποκλίνει, δηλ. ένα τουλάχιστο από τα ολοκληρώματα $\int_{-\infty}^{0} f(x)dx$ ή $\int_{0}^{+\infty} f(x)dx$ δεν υπάρχει, τότε και η πρωτεύουσα τιμή κατά Cauchy δεν υπάρχει.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. (p-ολοκλήρωμα). Να αποδείξετε ότι:

$$\int_{\alpha}^{+\infty}\frac{dx}{x^{p}}=\begin{cases}\dfrac{1}{p-1}\alpha^{1-p}, & p>1\\ +\infty, & p\leq 1\end{cases},\quad \alpha>0$$

Απόδειξη

Έχουμε:

$$\int_{\alpha}^{\beta}\frac{dx}{x^{p}}=\begin{cases}\dfrac{-1}{p-1}(\beta^{1-p}-\alpha^{1-p}), & \text{αν } p\neq 1\\ \log\dfrac{\beta}{\alpha}, & \text{αν } p=1\end{cases}$$

Συνεπώς:

$$\int_{\alpha}^{+\infty}\frac{dx}{x^{p}}=\lim_{\beta\to+\infty}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{dx}{x^{p}}=\begin{cases}\dfrac{1}{p-1}\alpha^{1-p}, & p>1\\ +\infty, & p\leq 1\end{cases}$$

Άρα το p-ολοκλήρωμα συγκλίνει αν $p>1$ και απειρίζεται θετικά αν $p\leq 1$.

2. Να αποδείξετε ότι: $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2} dx = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$

Απόδειξη

Εφαρμόζοντας παραγοντική ολοκλήρωση έχουμε:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2} dx = -\int_1^{+\infty} \sqrt{x} d\frac{1}{1+x} = -\lim_{s\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x}}{1+x} - \frac{1}{2}\right) + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{2\sqrt{x}(1+x)}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{2tdt}{t(1+t^2)} \quad (\text{θέτουμε } \sqrt{x}=t)$$

$$= \frac{1}{2} + \lim_{s\to+\infty}\left(\text{Artg}\sqrt{x} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$$

3. Μια συνάρτηση f μη αρνητική, λέγεται "κατανομή" αν $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

α) Για ποιά τιμή της θετικής σταθερής A η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} Ax^2e^{-\alpha x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, \alpha > 0$$

παριστάνει κατανομή;

β) Να αποδείξετε ότι η μέση τιμή μ είναι $\frac{3}{\alpha}$ και η διακύμανση σ^2 είναι $\frac{3}{\alpha^2}$, όπου τα μ και σ^2 ορίζονται ως εξής: $\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$, $\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx$.

Απόδειξη

α) Θα πρέπει να έχουμε: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$. Δηλαδή

$$1 = \int_0^{+\infty} Ax^2e^{-\alpha x}dx = -\frac{A}{\alpha^3}\int_0^{-\infty} y^2e^y dy \quad (\text{θέτοντας } y=-\alpha x)$$

$$= -\frac{A}{\alpha^3}\left[e^y(y^2-2y+2)\right]_0^{-\infty} = \frac{2A}{\alpha^3}$$

Άρα $A = \frac{1}{2}\alpha^3$

β) $$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^{+\infty} x\cdot\frac{1}{2}\alpha^3x^2e^{-\alpha x}dx = -\frac{1}{2\alpha}\int_0^{-\infty} y^3e^y dy$$

$$= -\frac{1}{2\alpha}\left[e^y(y^3-3y^2+6y-6)\right]_0^{-\infty} = \frac{3}{\alpha}$$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx = \int_0^{+\infty} (x-\mu)^2 Ax^2e^{-\alpha x}dx$$

$$= \frac{1}{2}\alpha^3\left(\int_0^{+\infty} x^4e^{-\alpha x}dx - 2\mu\int_0^{+\infty} x^3e^{-\alpha x}dx + \mu^2\int_0^{+\infty} x^2e^{-\alpha x}dx\right)$$

$$= \frac{1}{2}\alpha^3\left(\int_0^{+\infty} x^4e^{-\alpha x}dx - 2\cdot\frac{3}{\alpha}\cdot\frac{3\cdot 2}{\alpha^4} + \frac{9}{\alpha^2}\cdot\frac{2}{\alpha^3}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\alpha^3\left(\frac{24}{\alpha^5} - \frac{36}{\alpha^5} + \frac{18}{\alpha^5}\right) = \frac{3}{\alpha^2}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

3.1. Για ποιές τιμές του p το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} e^{-px}dx$ υπάρχει;

3.2. Να εξετάσετε ως προς τη σύγκλιση τα παρακάτω γενικευμένα ολοκληρώματα:

α) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\log x)^p}$, $p > 1$ β) $\int_0^{+\infty} x\sin x dx$

γ) $\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{\cosh x}$ δ) $\int_1^{+\infty} \log\frac{1}{x} dx$

ε) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\log\frac{1}{x} dx$ στ) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|x|}dx$, $\alpha > 0$

ζ) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5}$ η) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{x/3}}{1+e^x}dx$

3.3. Να αποδείξετε ότι:

α) $\int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x)^3}dx=\frac{1}{2}$ β) $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{Artg}x}{x^2}dx=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\log 2$

γ) $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\cos\beta x dx=\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}$, $\alpha>0$ δ) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx=\frac{\pi}{2}$

ε) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(\alpha^2+2\alpha x\cos\theta+x^2)^{3/2}}=\frac{1}{\alpha^2(1+\cos\theta)}$

3.4. Να βρεθεί το εμβαδό που περικλείεται από το γράφημα της f, την ασύμπτωτό της και τον άξονα των x αν:

α) $f(x)=xe^{-x^2/2}$ β) $f(x)=x^2e^{-x^2}$

3.5. Να βρεθεί το εμβαδό που περικλείεται από το γράφημα της f, τον άξονα Ox στο διάστημα $1\leqslant x<+\infty$ και ο όγκος από περιστροφή της f γύρω από τον άξονα Ox, αν:

α) $f(x)=e^{-x}$ β) $f(x)=\frac{1}{x}$ β) $f(x)=\frac{1}{x^2}$

3.6. Να εξετάσετε αν υπάρχει η πρωτεύουσα τιμή κατά Cauchy για τα ολοκληρώματα:

α) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}dx$ β) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{x^{2/3}}dx$

γ) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^2}dx$ δ) $\int_{-\infty}^{+\infty} \cos x dx$

ε) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2}dx$

§ 3.3. ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΣΥΓΚΛΙΣΕΩΣ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ Α΄ ΕΙΔΟΥΣ

Θα αναφέρουμε τώρα ορισμένα κριτήρια, με την βοήθεια των οποίων μπορούμε να εξετάσουμε ένα γενικευμένο ολοκλήρωμα της μορφής $\int_\alpha^{+\infty} f(x)dx$ ή $\int_{-\infty}^{\beta} f(x)dx$ ως προς την σύγκλιση. Θα περιοριστούμε μόνο να αναφέρουμε τα κριτήρια για την μορφή $\int_\alpha^{+\infty} f(x)dx$, αφού ένα γενικευμένο ολοκλήρωμα της μορφής $\int_{-\infty}^{\beta} f(x)dx$ ανάγεται εύκολα σε ολοκλήρωμα της μορφής $\int_\alpha^{+\infty} f(x)dx$ με την αντικατάσταση $t=-x$, ενώ ένα γενικευμένο ολοκλήρωμα της μορφής $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ ανάγεται από τον ορισμό στα ολοκληρώματα $\int_{-\infty}^{\alpha} f(x)dx$ και $\int_\alpha^{+\infty} f(x)dx$.

Θα αρχίσουμε με ένα κριτήριο, που δίνει ικανή και αναγκαία συνθήκη για την σύγκλιση του γενικευμένου ολοκληρώματος $\int_\alpha^{+\infty} f(x)dx$, γνωστό ως "κριτήριο του Cauchy".

Θεώρημα 3.3 (Κριτήριο του Cauchy). Έστω $f:[\alpha,+\infty)\to\mathbb{R}$ μια τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_\alpha^{+\infty} f(x)dx$ συγκλίνει, αν και μόνο αν, για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta>0$, τέτοιο ώστε για κάθε $x_1,x_2\in[\alpha,+\infty)$ με $x_1>\delta$, $x_2>\delta$ να έχουμε:

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx\right|<\varepsilon$$

Απόδειξη

Από τον Ορισμό 3.2 έχουμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_\alpha^{+\infty} f(x)dx$ θα συγκλίνει, αν και μόνο αν, η συνάρτηση $F:[\alpha,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $F(x)=\int_\alpha^x f(t)dt$ συγκλίνει όταν $x\to+\infty$. Αλλά τότε σύμφωνα με το κριτήριο του Cauchy για την σύγκλιση πραγματικών συναρτήσεων* θα έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty} F(x)=\ell \Leftrightarrow (\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x_1,x_2\in[\alpha,+\infty))\ x_1>\delta, x_2>\delta \Rightarrow |F(x_1)-F(x_2)|<\varepsilon.$$

* Απειροστικός Λογισμός 1, Θεώρημα 3.13.

Επειδή όμως:

$$F(x_1)-F(x_2)=\int_{a}^{x_1} f(t)dt-\int_{a}^{x_2} f(t)dt=-\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt$$

η παραπάνω συνθήκη γράφεται:

$$(\forall \varepsilon >0)(\exists \delta >0)(\forall x_1,x_2 \in [a,+\infty))\ x_1>\delta, x_2>\delta \Rightarrow \left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx\right|<\varepsilon \ \blacksquare$$

Παρατήρηση 3.6.

Η συνθήκη στο θεώρημα 3.3 είναι ισοδύναμη με την απαίτηση ότι το όριο του ολοκληρώματος $\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$ είναι 0 όταν $x_1 \to +\infty$ και $x_2 \to +\infty$.

Παράδειγμα 3.8.

Το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{a}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx,\ a>0$ συγκλίνει. Πραγματικά σύμφωνα με το κριτήριο του Cauchy για $a<x_1<x_2$ έχουμε:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\sin x}{x}dx=-\int_{x_1}^{x_2}\frac{1}{x}d\cos x=\frac{\cos x_1}{x_1}-\frac{\cos x_2}{x_2}-\int_{x_1}^{x_2}\frac{\cos x}{x^2}dx$$

Συνεπώς

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} \frac{\sin x}{x}dx\right| \leqslant \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\left|\int_{x_1}^{x_2} \frac{|\cos x|}{x^2}dx\right|$$

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{x^2}=\frac{2}{x_1}<\varepsilon$$

αρκεί να διαλέξουμε ως $\delta=\frac{2}{\varepsilon}$.

Παρατήρηση 3.7.

Έστω $a_1>a$. Τότε η ισότητα

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx=\int_{a}^{a_1} f(x)dx+\int_{a_1}^{+\infty} f(x)dx$$

συνεπάγεται ότι τα ολοκληρώματα $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ και $\int_{a_1}^{+\infty} f(x)dx$ είναι της ίδιας φύσης ως προς τη σύγκλιση,δηλ. θα συγκλίνουν ή θα αποκλίνουν συγ-

χρόνως. Συνεπώς όταν εξετάζουμε ένα ολοκλήρωμα $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ ως προς τ σύγκλιση, μπορούμε να το αντικαταστήσουμε με άλλο της μορφής $\int_{a_1}^{+\infty} f(x)d$ για κάποιο $a_1>a$, αρκεί η f να ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Ορισμού 3.2.

Έτσι στο Παράδειγμα 3.8 μπορούμε να αποδείξουμε ότι και το γενι-κευμένο ολοκλήρωμα $\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$ συγκλίνει αφού $\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx=\int_{0}^{1} \frac{\sin x}{x}dx$ $\int_{1}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$ και το πρώτο ολοκλήρωμα του β΄ μέλους υπάρχει γιατί η f(x $=\frac{\sin x}{x}$ μπορεί να γίνει συνεχής στο 0 αν ορίσουμε $f(0)=1$.

Το κριτήριο του Cauchy, αν και δίνει ικανή και αναγκαί συνθήκη για την σύγκλιση του γενικευμένου ολοκληρώματος $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$, εν τούτοις δεν είναι εύχρηστο στις εφαρμογές. Γι' αυτό θα αναφέρουμε παρακάτω κριτήρια που δίνουν ικανές συνθήκες για την σύγκλιση του γενικευμένου ολοκληρώματος $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$, που μπορούν πιο εύκολα να εφαρμοστούν στην πράξη.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα γενικευμένα ολοκληρώματα μη αρνητικών συναρτήσεων. Τέτοια ολοκληρώματα θα αφορούν τα επόμενα κριτήρια.

Όπως είναι γνωστό το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ θα συγκλίνει αν η συνάρτηση $F(x)=\int_{a}^{x} f(t)dt$ έχει όριο για $x \to +\infty$. Ας υποθέσουμε ότι $f(t) \geqslant 0,\ \forall t \geqslant a$. Τότε η συνάρτηση F θα είναι αύξουσα, αφού

$$F(x_2)-F(x_1)=\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt \geqslant 0$$

για $a \leqslant x_1 < x_2$. Υπάρχουν τώρα δυο δυνατότητες: η F θα είναι φραγμένη προς τα πάνω ή δεν θα είναι. Αν η F είναι φραγμέν τότε θα συγκλίνει, αφού είναι και μονότονη. Αν όμως δεν είναι φραγμένη τότε σαν αύξουσα θα απειρίζεται θετικά.

Έτσι με την παραπάνω συζήτηση, έχουμε αποδείξει το ακόλουθο:

Θεώρημα 3.4. Έστω $f:[\alpha,+\infty) \to \mathbb{R}$ μια μη αρνητική και τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τότε το ολοκλήρωμα $\int_\alpha^{+\infty} f(x)dx$ συγκλίνει, αν η συνάρτηση $F(x)=\int_\alpha^{x} f(t)dt$ είναι φραγμένη στο $[\alpha,+\infty)$ και απειρίζεται θετικά αν η F δεν είναι φραγμένη. Σε οποιαδήποτε περίπτωση είναι:

$$\int_\alpha^{+\infty} f(x)dx = \sup_{\alpha\le x<+\infty} F(x)$$

Παράδειγμα 3.9.

Είναι $\int_0^{+\infty} \frac{|\cos x|}{1+x^2}dx < +\infty$

Πραγματικά, επειδή

$$|F(x)|=\left|\int_0^x \frac{\cos t}{1+t^2}dt\right| \le \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \mathrm{Artg}x < \frac{\pi}{2}$$

σύμφωνα με το θεώρημα 3.4 το δοσμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει.

Θεώρημα 3.5 (Κριτήριο συγκρίσεως). Έστω $f,g:[\alpha,+\infty) \to \mathbb{R}$ δυο τοπικά ολοκληρώσιμες συναρτήσεις, τέτοιες ώστε:

$$0 \le f(x) \le g(x),\ \alpha \le x < +\infty. \text{ Τότε:}$$

i) $\int_\alpha^{+\infty} g(x)dx < +\infty \Rightarrow \int_\alpha^{+\infty} f(x)dx < +\infty$

ii) $\int_\alpha^{+\infty} f(x)dx = +\infty \Rightarrow \int_\alpha^{+\infty} g(x)dx = +\infty$

Απόδειξη

Επειδή $0 \le f(x) \le g(x)$, $\alpha \le x < +\infty$ θα έχουμε:

$$\int_\alpha^x f(t)dt \le \int_\alpha^x g(t)dt$$

Συνεπώς

$$\sup_{\alpha\le x<+\infty} \int_\alpha^x f(t)dt \le \sup_{\alpha\le x<+\infty} \int_\alpha^x g(t)dt \qquad (1)$$

i) Αν $\int_\alpha^{+\infty} g(x)dx < +\infty$, τότε το δεξιά μέλος της (1) είναι πεπερασμένο, από το θεώρημα 3.4. Άρα και το αριστερά μέλος είναι φραγμένο και επομένως $\int_\alpha^{+\infty} f(x)dx < +\infty$, πάλι από το θεώρημα 3.4.

ii) Έστω $\int_\alpha^{+\infty} f(x)dx = +\infty$ και ας υποθέσουμε ότι $\int_\alpha^{+\infty} g(x)dx < +\infty$. Τότε όμως από το i) θα είχαμε ότι και $\int_\alpha^{+\infty} f(x)dx < +\infty$, άτοπο. Άρα και $\int_\alpha^{+\infty} g(x)dx = +\infty$. ■

Πόρισμα: Έστω $f:[\alpha,+\infty) \to \mathbb{R}$ μια τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αν $x^p\cdot f(x) \le k$, $\forall x \in [\alpha,+\infty)$, $p>1$ τότε $\int_\alpha^{+\infty} f(x)dx < +\infty$. Αν $x^p\cdot f(x) \ge k>0$, $\forall x \in [\alpha,+\infty)$, $p \le 1$ τότε $\int_\alpha^{+\infty} f(x)dx = +\infty$.

Απόδειξη

Άμεση συνέπεια του θεωρήματος 3.5 με $g(x)=\frac{1}{x^p}$ (p-ολοκλήρωμα, εφαρμογή 1 της § 3.2) ■

Παράδειγμα 3.10.

Είναι $\int_\alpha^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} < +\infty$, $\alpha>0$

Έστω $f(x)=\frac{1}{1+x^4}$. Τότε

$$0<f(x)=\frac{1}{1+x^4}<\frac{1}{x^4}=g(x),\ x\in[\alpha,+\infty)$$

Επειδή $\int_\alpha^{+\infty} \frac{dx}{x^4} < +\infty$ (p-ολοκλήρωμα, εφαρμογή 1 της §3.2) σύμφωνα με τ θεώρημα 3.5 και το δοσμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει.

Παρατήρηση 3.8.

Σύμφωνα με την Παρατήρηση 3.7 είναι και $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} < +\infty$ αφού $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \int_0^{a} \frac{dx}{1+x^4} + \int_a^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$ και το ολοκλήρωμα $\int_0^{a} \frac{dx}{1+x^4}$ υπάρχει, αφού αυτό είναι ορισμένο ολοκλήρωμα.

Παράδειγμα 3.11.

Επειδή $\frac{1}{1+x} \leqslant \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}}$, $\forall x \geqslant 0$ και $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x} = +\infty$ συνεπάγεται ότι και

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^3)^{1/3}} = +\infty$$

Θεώρημα 3.6 (Οριακό κριτήριο συγκρίσεως). Έστω f, g: $[\alpha,+\infty) \to \mathbb{R}$ τοπικά ολοκληρώσιμες συναρτήσεις με $f(x) \geqslant 0$ και $g(x) > 0$, $\forall x \in [\alpha_1,+\infty)$ με $\alpha_1 > \alpha$. Αν

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$$

Τότε:

i) Αν $0 < \ell < +\infty$, τότε $\int_a^{+\infty} f(x)dx < +\infty \Leftrightarrow \int_a^{+\infty} g(x)dx < +\infty$

ii) Αν $\ell = 0$ και $\int_a^{+\infty} g(x)dx < +\infty \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx < +\infty$

iii) Αν $\ell = +\infty$ και $\int_a^{+\infty} g(x)dx = +\infty \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx = +\infty$

Απόδειξη

Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in [\alpha,+\infty))x > \delta \Rightarrow \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \ell \right| < \varepsilon$$

i) Αφού $0 < \ell < +\infty$ για $\varepsilon = \frac{\ell}{2}$ παίρνουμε:

$$0 < \frac{\ell}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3\ell}{2},\ \forall x > \alpha_2 = \max\{\alpha_1, \delta\}$$

Άρα

$$\frac{\ell}{2} g(x) < f(x) < \frac{3\ell}{2} g(x),\ x \geqslant \alpha_2$$

Το θεώρημα 3.5 και η πρώτη ανισότητα συνεπάγονται ότι $\int_{\alpha_2}^{+\infty} g(x)dx < +\infty$ αν $\int_{\alpha_2}^{+\infty} f(x)dx < +\infty$. Το ίδιο θεώρημα και η δεύτερη ανισότητα συνεπάγονται ότι $\int_{\alpha_2}^{+\infty} f(x)dx < +\infty$ αν $\int_{\alpha_2}^{+\infty} g(x)dx < +\infty$. Άρα τα $\int_{\alpha_2}^{+\infty} f(x)dx$ και $\int_{\alpha_2}^{+\infty} g(x)dx$ συγκλίνουν ή απειρίζονται θετικά συγχρόνως. Αφού από την Παρατήρηση 3.7 το ίδιο ισχύει και για τα ολοκληρώματα $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ και $\int_a^{+\infty} g(x)dx$, το θεώρημα σ' αυτήν την περίπτωση αποδείχτηκε.

ii) Αν $\ell = 0$ τότε θα έχουμε:

$$0 < f(x) < \xi g(x),\quad x \geqslant \alpha_2$$

Από το Θεώρημα 3.5 προκύπτει αμέσως το συμπέρασμα.

iii) Αφήνεται για άσκηση. ■

Το ακόλουθο Πόρισμα είναι εξαιρετικά χρήσιμο στις εφαρμογές.

Πόρισμα: Έστω $f:[\alpha,+\infty) \to \mathbb{R}$ μια τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τότε:

α) Αν $\lim_{x\to+\infty} x^p \cdot f(x) = \ell, 0 \leqslant \ell < +\infty, p > 1 \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx < +\infty$

β) Αν $\lim_{x\to+\infty} x^p f(x) = \ell, 0 < \ell \leqslant +\infty,\ p \leqslant 1 \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx = +\infty$

Απόδειξη

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 3.6 με $g(x) = \frac{1}{x^p}$, $x \in [\alpha,+\infty)$. ■

Παράδειγμα 3.12.

Το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_2^{+\infty} \frac{x^2dx}{2x^4-x^2+1}$ συγκλίνει. Για να το αποδείξουμε θα εφαρμόσουμε το θεώρημα 3.6 με $f(x)=\frac{x^2}{2x^4-x^2+1}$ και διαλέγοντας ως $g(x)=\frac{x^2}{x^4}=\frac{1}{x^2}$. (Από την f παίρνουμε τις μεγαλύτερες δυνάμεις του x από τον αριθμητή και από τον παρονομαστή).

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=1/2$ και $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}<+\infty$ (p-ολοκλήρωμα με p=2) θα έχουμε από το θεώρημα 3.6 i) ότι και $\int_1^{+\infty} f(x)dx<+\infty$.

Παράδειγμα 3.13.

Είναι $\int_1^{+\infty} x^{\alpha}e^{-x}dx<+\infty$. Πραγματικά· επειδή

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\cdot(x^{\alpha}e^{-x})=\lim_{x\to+\infty} x^{\alpha+2}\cdot e^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha+2}}{e^{x}}=0$$

(με εφαρμογές του κανόνα του L'Hospital), από το Πόρισμα του θεωρήματος 3.6 προκύπτει το συμπέρασμα.

Παράδειγμα 3.14.

Θεωρούμε το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{\log x}$

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot\frac{1}{\log x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\log x}=\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$, από το β) του Πορίσματος του θεωρήματος 3.6 έχουμε ότι:

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{\log x}=+\infty$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Έστω $f,g:[\alpha,+\infty)\to\mathbb{R}$ δυο τοπικά ολοκληρώσιμες συναρτήσεις, με την g σταθερού προσήμου στο $[\alpha,+\infty)$. Ακόμα έστω ότι υπάρχουν τα γενικευμένα ολοκληρώματα $\int_{\alpha}^{+\infty} f(x)g(x)dx$ και $\int_{\alpha}^{+\infty} g(x)dx\neq 0$. Τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε:

$$\int_{\alpha}^{+\infty} f(x)g(x)dx=\xi\int_{\alpha}^{+\infty} g(x)dx$$

Απόδειξη

Ας είναι $m_x=\inf f$ και $M_x=\sup f$ στο διάστημα $[\alpha,x]$. Θεωρούμε τα ολοκληρώματα $\int_{\alpha}^{x} f(t)g(t)dt$ και $\int_{\alpha}^{x} g(t)dt$. Τότε από το Θεώρημα 2.23 (α' Θεώρημα Μέσης Τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού) θα υπάρχει $\eta(x)\in[m_x,M_x]$ τέτοιο ώστε:

$$\int_{\alpha}^{x} f(t)g(t)dt=\eta(x)\int_{\alpha}^{x} g(t)dt$$

Επειδή από την υπόθεση υπάρχουν τα $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_{\alpha}^{x} f(t)g(t)dt=\int_{\alpha}^{+\infty} f(x)g(x)dx$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_{\alpha}^{x} g(t)dt=\int_{\alpha}^{+\infty} g(x)dx\neq 0$, από την τελευταία ισότητα συνεπάγεται ότι θα υπάρχει και το $\lim\limits_{x\to+\infty}\eta(x)=\xi\in\mathbb{R}$. Συνεπώς έχουμε: $\int_{\alpha}^{+\infty} f(x)g(x)dx=\xi\int_{\alpha}^{+\infty} g(x)dx$.

Σημείωση

Το παραπάνω αποτελεί μια γενίκευση του α' θεωρήματος της Μέσης Τιμής, για γενικευμένα ολοκληρώματα α' είδους.

2. Έστω $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ μια τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση, μη αρνητική στο $[0,+\infty)$. Να αποδείξετε ότι $\int_0^{+\infty} f(x)e^{-\alpha x}dx<+\infty$, $\alpha>0$ αρκεί να υπάρχει ένας θετικός αριθμός $\beta<\alpha$ τέτοιος ώστε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)e^{-\beta x}=0$. (Δηλ. αν η f δεν απειρίζεται πιο γρήγορα από την $e^{\beta x}$ για κάποιο $\beta<\alpha$).

Απόδειξη

Αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)e^{-\beta x}=0$, θα υπάρχει ένας αριθμός x_1, τέτοιος ώστε $f(x)e^{-\beta x}\leqslant 1$, $\forall x\geqslant x_1$. Συνεπώς $f(x)\leqslant e^{\beta x}$, $\forall x\geqslant x_1$. Είναι:

$$\int_0^{+\infty} f(x)e^{-\alpha x}dx=\int_0^{x_1} f(x)e^{-\alpha x}dx+\int_{x_1}^{+\infty} f(x)e^{-\alpha x}dx.$$

πρώτο ολοκλήρωμα του β΄ μέλους υπάρχει, αφού είναι ορισμένο. Για το
ύτερο παρατηρούμε ότι:

$$f(x)e^{-\alpha x} \leqslant e^{\beta x} \cdot e^{-\alpha x} = e^{-(\alpha-\beta)x}, \quad x \geqslant x_1$$

ειδή $\int_{x_1}^{+\infty} e^{-(\alpha-\beta)x}dx < +\infty$ (το οποίο προκύπτει άμμεσα από τον ορισμό)
ό το Θεώρημα 3.5 έχουμε ότι και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{x_1}^{+\infty} f(x)e^{-\alpha x}dx$
γκλίνει. Κατά συνέπεια $\int_{0}^{+\infty} f(x)e^{-\alpha x}dx < +\infty$.

3. Να αποδείξετε ότι: $\int_0^{+\infty} x\sin(x^4)dx < +\infty$.

όδειξη

Θα εφαρμόσουμε το κριτήριο του Cauchy (θεώρημα 3.3). Αρκεί να απο-
ίξουμε ότι:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x_1, x_2 \in [0,+\infty))\, x_2 > x_1 > \delta \Rightarrow \left| \int_{x_1}^{x_2} x\sin(x^4)dx \right| < \varepsilon.$$

χουμε:

$$\int_{x_1}^{x_2} x\sin(x^4)dx = \frac{1}{4}\int_{x_1^4}^{x_2^4} \frac{\sin\omega}{\sqrt{\omega}}\,d\omega \qquad (\text{θέτοντας } x^4=\omega)$$

$$= -\frac{1}{4}\frac{\cos\omega}{\sqrt{\omega}}\Bigg|_{x_1^4}^{x_2^4} - \frac{1}{8}\int_{x_1^4}^{x_2^4}\frac{\cos\omega}{\omega^{3/2}}\,d\omega$$

$$= -\frac{1}{4}\left[\frac{\cos x_2^4}{x_2^2} - \frac{\cos x_1^4}{x_1^2}\right] - \frac{1}{8}\int_{x_1^4}^{x_2^4}\frac{\cos\omega}{\omega^{3/2}}\,d\omega$$

ρα:

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} x\sin(x^4)dx\right| \leqslant \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x_2^2}+\frac{1}{x_1^2}\right) + \frac{1}{8}\int_{x_1^4}^{x_2^4}\frac{d\omega}{\omega^{3/2}}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x_2^2}+\frac{1}{x_1^2}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x_2^2}-\frac{1}{x_1^2}\right) = \frac{1}{2x_1^2} < \varepsilon$$

υ διαλέξουμε ως $\delta = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}$

Σημείωση

Δεν πρέπει να σχηματισθεί η εντύπωση ότι για να συγκλίνει ένα γενικευμένο ολοκλήρωμα α΄ είδους, πρέπει η συνάρτηση να είναι φραγμένη. Γενικά μπορεί το γενικευμένο ολοκλήρωμα να συγκλίνει ακόμα και όταν η συνάρτηση δεν είναι φραγμένη. Το παραπάνω γενικευμένο ολοκλήρωμα είναι ένα τέτοιο παράδειγμα. Αποδείξαμε ότι συγκλίνει, αλλά η f δεν είναι φραγμένη, αφού για $x=\left[(2\nu+1)\frac{\pi}{2}\right]^{1/4}$, $\nu \in \mathbb{N}$ έχουμε:

$$\lim_{\nu\to+\infty}\left|\left[(2\nu+1)\,\frac{\pi}{2}\right]^{1/4}\sin\frac{2\nu+1}{2}\pi\right| = \lim_{\nu\to+\infty}\left[(2\nu+1)\frac{\pi}{2}\right]^{1/4} = +\infty$$

4. (Ολοκλήρωμα του Poisson). Να αποδείξετε ότι:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Απόδειξη

Παρατηρούμε πρώτα ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ συγκλίνει, αφού $\lim_{x\to+\infty} x^2e^{-x^2}=0$ (Πόρισμα του θεωρήματος 3.6). Για να το υπολογίσουμε θέτουμε $x=\omega\sqrt{\nu}, \nu \in \mathbb{N}$ οπότε:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\nu}\int_0^{+\infty} e^{-\nu\omega^2}d\omega \tag{1}$$

Επειδή όμως ισχύει*:

$$1-x^2 \leqslant e^{-x^2} \leqslant \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

θα έχουμε:

$$(1-x^2)^\nu \leqslant e^{-\nu x^2} \leqslant \frac{1}{(1+x^2)^\nu}, \quad x \in [0,1]$$

Άρα:

---

* Απειροστικός Λογισμός 1, άσκηση 5.66.

$$\int_0^1 (1-x^2)^\nu dx \leqslant \int_0^1 e^{-\nu x^2} dx \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-\nu x^2} dx \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^\nu} \qquad (2)$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα της (2) για $x=\cos t$ δίνει:

$$\int_0^1 (1-x^2)^\nu dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{2\nu+1} t dt = \frac{2\cdot 4\cdots(2\nu)}{3\cdot 5\cdots(2\nu+1)} \qquad (3)$$

από την εφαρμογή 2α της §2.7.

Το τελευταίο ολοκλήρωμα της (2) για $x=\mathrm{tg}t$ δίνει:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^\nu} = \int_0^{\pi/2} \cos^{2\nu-2} t dt = \frac{1\cdot 3\cdots(2\nu-3)}{2\cdot 4\cdots(2\nu-2)} \cdot \frac{\pi}{2} \qquad (4)$$

πάλι από την εφαρμογή 2α της §2.7.

Από τις (1), (2), (3) και (4) έχουμε:

$$\sqrt{\nu}\, \frac{2\cdot 4\cdots(2\nu)}{3\cdot 5\cdots(2\nu+1)} \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \leqslant \frac{1\cdot 3\cdots(2\nu-3)}{2\cdot 4\cdots(2\nu-2)} \cdot \frac{\pi}{2} \sqrt{\nu} \qquad (5)$$

Όμως είναι:

$$\lim \left\{ \left[\frac{2\cdot 4\cdots(2\nu)}{3\cdot 5\cdots(2\nu-1)} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\nu}} \right] \frac{2\nu}{2\nu+1} \right\} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot 1 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

και

$$\lim \left\{ \left[\frac{1\cdot 3\cdots(2\nu-1)}{2\cdot 4\cdots(2\nu)} \; \frac{1}{2\sqrt{\nu}} \right] \frac{2\nu}{2\nu-1} \cdot \frac{\pi}{4} \right\} = \frac{1}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \cdot 1 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

από τον τύπο του Wallis (Εφαρμογή 2β της §2.7).

Επομένως από την (5) έχουμε ότι:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

3.7. Να εξετάσετε ως προς τη σύγκλιση τα παρακάτω γενικευμένα ολοκληρώματα:

α) $\int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx,\ a>0$ β) $\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx$ γ) $\int_0^{+\infty} x\cos(x^4) dx$

3.8. Επίσης, τα ολοκληρώματα:

α) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{e^x}{x} dx$ β) $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2-2}}$

γ) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$ δ) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+e^x}$ (e^{-x})

ε) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{(\log x)^p},\ p>0$ στ) $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Artg}x}{1+x^2} dx$

3.9. Να εξετάσετε ως προς τη σύγκλιση τα ολοκληρώματα:

α) $\int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x^2} dx$ β) $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-1/x}}{1+x^2} dx$ $g(x)=\frac{1}{1+x^2}$

γ) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x^3+2x)^{1/2}}$ δ) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^4-1}$

ε) $\int_1^{+\infty} \frac{x^2 dx}{3x^4+2x^2-1}$ στ) $\int_0^{+\infty} \frac{1+2x^2}{(1+x)^4} dx$

3.10. Να αποδείξετε ότι:

α) $\int_0^{+\infty} x^\nu e^{-ax} dx < +\infty,\ a>0,\ \nu>0$

β) $\int_0^{+\infty} e^{-ax} \cdot \sinh \nu x dx < +\infty,\ a>\nu$

γ) $\int_0^{+\infty} x^\nu e^{-ax} \log(1+x) dx < +\infty,\ a>0,\ \nu>0$

δ) $\int_1^{+\infty} \frac{e^{at}}{t^\beta} dt = +\infty,\ a>0,\ \beta>0$

3.11. Να βρήτε τις τιμές του p για τις οποίες το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} x^p e^{-x} dx$ συγκλίνει.

3.12. Να βρεθούν συνθήκες μεταξύ των p και q ώστε τα παρακάτω ολοκληρώματα να συγκλίνουν:

α) $\int_1^{+\infty} \frac{[\log(1+x)-\log x]^q}{x^p}dx$ β) $\int_1^{+\infty} \frac{x^p}{(1+x^2)^q}dx$

3.13. Να αποδείξετε ότι:

α) $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\alpha^{-1/2}$ β) $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-2x}}{\sqrt{x}}dx=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

3.14. Αν $\varphi(\nu)=\alpha^{2\nu-1}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(\alpha^2+x^2)^\nu}$ τότε να αποδείξετε ότι:

$$\varphi(\nu)=\frac{2\nu-3}{2\nu-2}\varphi(\nu-1)$$

3.15. Αν $I_\nu=\int_0^{+\infty}\frac{x^\nu}{1+x^4}dx$ τότε να αποδείξετε ότι: $I_0=I_2$ και $I_1=\frac{1}{4}\pi$. Θεωρώντας την παράσταση $I_0+I_2-\sqrt{2}I_1$ (ή διαφορετικά) να αποδείξετε ότι: $I_2=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

§ 3.4. ΑΠΟΛΥΤΗ ΚΑΙ ΥΠΟ ΣΥΝΘΗΚΗ ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ Α΄ ΕΙΔΟΥΣ

Ορισμός 3.6: Έστω $f:[\alpha,+\infty)\to\mathbb{R}$ μια τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Θα λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_\alpha^{+\infty}f(x)dx$ συγκλίνει απόλυτα (ή ότι η f είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη) αν $\int_\alpha^{+\infty}|f(x)|dx<+\infty$. Αν $\int_\alpha^{+\infty}f(x)dx<+\infty$ και $\int_\alpha^{+\infty}|f(x)|dx=+\infty$, τότε λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_\alpha^{+\infty}f(x)dx$ συγκλίνει υπό συνθήκη (ή ότι η f είναι υπό συνθήκη ολοκληρώσιμη).

Θεώρημα 3.7. Αν η $f:[\alpha,+\infty)\to\mathbb{R}$ είναι τοπικά ολοκληρώσιμη και $\int_\alpha^{+\infty}|f(x)|dx<+\infty$ τότε και $\int_\alpha^{+\infty}f(x)dx<+\infty$. Δηλαδή, η απόλυτη σύγκλιση συνεπάγεται την απλή σύγκλιση. Το αντίστροφο δεν αληθεύει.

Απόδειξη

Έστω $g(x)=|f(x)|-f(x)$. Τότε

$$0\leq g(x)\leq 2|f(x)|$$

Από το Θεώρημα 3.5 έχουμε ότι $\int_\alpha^{+\infty}g(x)dx<+\infty$. Αφού όμως $f(x)=|f(x)|-g(x)$ θα είναι και $\int_\alpha^{+\infty}f(x)dx<+\infty$.

Το ότι δεν ισχύει το αντίστροφο, θα το διαπιστώσουμε με ένα παράδειγμα. Ας θεωρήσουμε το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_\alpha^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx,\ \alpha>0$$

Αυτό ξέρουμε ότι συγκλίνει (Παράδειγμα 3.8). Θα αποδείξουμε ότι: $\int_\alpha^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x}dx=+\infty$. Πραγματικά από την ανισότητα $\sin^2x\leq|\sin x|$ έχουμε ότι:

$$\int_\alpha^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x}dx\geq\int_\alpha^{+\infty}\frac{\sin^2x}{x}dx=\int_\alpha^{+\infty}\frac{1-\cos 2x}{2x}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{2\alpha}^{+\infty}\frac{1-\cos u}{u}du\quad (\text{θέτοντας } 2x=u)$$

$$=\frac{1}{2}\int_{2\alpha}^{+\infty}\frac{du}{u}-\frac{1}{2}\int_{2\alpha}^{+\infty}\frac{\cos u}{u}du$$

Επειδή $\int_{2\alpha}^{+\infty}\frac{\cos u}{u}du<+\infty$ (άσκηση 3.7α) και $\int_{2\alpha}^{+\infty}\frac{du}{u}=+\infty$ (Εφαρμογή 1 της § 3.2) έχουμε ότι $\int_\alpha^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x}dx=+\infty$. ■

Παράδειγμα 3.15.

Θα αποδείξουμε ότι $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}\sin x}{1+x}dx < +\infty$. Έχουμε:

$$\left|\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}\sin x}{1+x}dx\right| \leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1+x}dx \leq \int_0^{+\infty} e^{-x}dx < +\infty,$$ από το Παράδειγμα 3.3.

Δηλαδή το δοσμένο γενικευμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει απόλυτα, άρα και απλά από το θεώρημα 3.7.

Θεώρημα 3.8 (Κριτήριο του Dirichlet). Έστω $f: [\alpha,+\infty) \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ακόμα ότι η συνάρτηση $F(x) = \int_\alpha^x f(t)dt$ είναι φραγμένη στο $[\alpha,+\infty)$. Αν $g:[\alpha,+\infty) \to \mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση με την g' απόλυτα ολοκληρώσιμη και τέτοια ώστε $\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$, τότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$\int_\alpha^{+\infty} f(x)g(x)dx$ συγκλίνει.

Απόδειξη

Οι υποθέσεις συνεπάγονται ότι η $f\cdot g$ είναι τοπικά ολοκληρώσιμη στο $[\alpha,+\infty)$. Εφαρμόζοντας παραγοντική ολοκλήρωση, έχουμε:

$$\int_\alpha^\beta f(x)g(x)dx = F(\beta)g(\beta) - \int_\alpha^\beta F(x)g'(x)dx, \quad \alpha \leq \beta < +\infty$$

αφού $F(\alpha)=0$. Επειδή $|F(x)| \leq M$ και $|F(x)g(x)| \leq M|g(x)|$ θα έχουμε $\lim_{\beta\to+\infty} F(\beta)g(\beta)=0$ (μηδενική επί φραγμένη).

Συνεπώς:

$$\int_\alpha^{+\infty} f(x)g(x)dx = -\int_\alpha^{+\infty} F(x)g'(x)dx$$

Επειδή όμως η g' είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη, δηλ. $\int_\alpha^{+\infty} |g'(x)|dx < +\infty$ θα έχουμε:

$$\left|\int_\alpha^{+\infty} F(x)g'(x)dx\right| \leq M\int_\alpha^{+\infty} |g'(x)|dx < +\infty.$$

Επομένως έχουμε ότι το δεξιά ολοκλήρωμα στην τελευταία ισότητα συγκλίνει απόλυτα και συνεπώς το αρχικό ολοκλήρωμα συγκλίνει. ■

Πόρισμα: Έστω $f:[\alpha,+\infty) \to \mathbb{R}$ μια τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αν η $F:[\alpha,+\infty) \to \mathbb{R}$ με $F(x) = \int_\alpha^x f(t)dt$ είναι φραγμένη, τότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_\alpha^{+\infty} \frac{f(x)}{x^p}dx$, $\alpha > 0, p > 0$ συγκλίνει.

Παράδειγμα 3.16.

Για να αποδείξουμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_1^{+\infty} \cos(x^2)dx$$

συγκλίνει, θέτουμε $x^2=t$, οπότε παίρνουμε το ολοκλήρωμα

$$\int_1^{+\infty} \cos(x^2)dx = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}}dt$$

Η συνάρτηση $f(x)=\cos x$ είναι συνεχής και $\int_1^x \cos t\,dt = \sin x - \sin 1$, δηλ. $|F(x)| = \left|\int_1^x \cos t\,dt\right| \leq 2$. Επίσης η $g(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ είναι μηδενική και η $g'(x) = -\frac{1}{4}\frac{1}{x^{3/2}}$ είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη. Άρα από το θεώρημα 3.8 το δοσμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει.

Παράδειγμα 3.17.

Ας θεωρήσουμε το ολοκλήρωμα

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}dx$$

Σύμφωνα με το Πόρισμα του Θεωρήματος 3.8 το ολοκλήρωμα με $p > 0$ συγκλίνει, αφού η $F(x) = \int_1^x \sin t\,dt$ είναι φραγμένη.

Παρατήρηση 3.9.

Το κριτήριο του Dirichlet μπορεί να αποδειχτεί και πιο γενικά, χωρύς την συνθήκη να είναι η g παραγωγίσιμη, με τη βοήθεια του β΄ θεωρήματος της Μέσης Τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού (θεώρημα 2.24). Βλέπε Εφαρμογή 1 παρακάτω.

Παρατήρηση 3.10.

Το κριτήριο του Dirichlet μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αποδειχτεί ότι ένα γενικευμένο ολοκλήρωμα αποκλίνει. Για παράδειγμα το $\int_1^{+\infty} x^p \cdot \sin x dx$ αποκλίνει για $p>0$, αλλά κανένα από τα κριτήρια που έχουμε δώσει δεν μπορεί να μας το εξασφαλίσει. Για να το αποδείξουμε, παρατηρούμε ότι αν αυτό συνέκλινε για κάποιο $p>0$, θέτοντας $f(x)=x^p\sin x$ και $g(x)=x^{-p}$ στο θεώρημα 3.8 θα είχαμε σαν συμπέρασμα ότι και το $\int_1^{+\infty} \sin x dx$ συγκλίνει. Αυτό όμως είναι άτοπο, Παράδειγμα 3.4.

Αν με το κριτήριο του Dirichlet αποδείξουμε ότι το ολοκλήρωμα $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ συγκλίνει, τότε το ερώτημα αν η σύγκλιση είναι απόλυτη ή υπό συνθήκη παραμένει ανοιχτό. Το επόμενο θεώρημα, το οποίο αναφέρουμε χωρίς απόδειξη, δίνει πολλές φορές απάντηση σ' αυτό το ερώτημα.

Θεώρημα 3.9. Έστω $\varphi : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ μια φθίνουσα και μηδενική συνάρτηση. Τότε τα ολοκληρώματα

$$\int_a^{+\infty} \varphi(x)\sin x\, dx \quad \text{και} \quad \int_a^{+\infty} \varphi(x)\cos x\, dx$$

συγκλίνουν:

i) απόλυτα, αν $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx < +\infty$ και

ii) υπό συνθήκη, αν $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx = +\infty$.

Παράδειγμα 3.18.

Το ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ συγκλίνει υπό συνθήκη, αφού η $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$, $x\geq 1$ είναι φθίνουσα, μηδενική και $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = +\infty$.

Παράδειγμα 3.19.

Το ολοκλήρωμα $\int_\pi^{+\infty} \frac{\cos x}{x+\sin x} dx$ συγκλίνει από το θεώρημα 3.8, αφού η $F(x)=\int_\pi^x \cos t\, dt$ είναι φραγμένη και για την $\varphi(x)=\frac{1}{x+\sin x}$ ισχύει $\lim_{x\to+\infty} (x)=0$ και η φ' είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη.

Η σύγκλιση είναι υπό συνθήκη, αφού η φ είναι φθίνουσα, μηδενική και $\int_\pi^{+\infty} \frac{dx}{x+\sin x} = +\infty$ επειδή $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x+\sin x} : \left(\frac{1}{x}\right) = 1$.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Έστω $f,g:[\alpha,+\infty) \to \mathbb{R}$ δυο συναρτήσεις, τέτοιες ώστε η f είναι συνεχής και η g φθίνουσα και μηδενική. Αν η $F:[\alpha,+\infty) \to \mathbb{R}$ με $F(x)=\int_\alpha^x f(t)dt$ είναι φραγμένη, τότε το ολοκλήρωμα $\int_\alpha^{+\infty} f(x)g(x)dx$ συγκλίνει.

Απόδειξη

Έστω M το φράγμα της F, δηλ. $|F(x)| \leq M, \forall x \geq \alpha$. Αφού $\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$, υπάρχει $x_0 > \alpha$ τέτοιο ώστε $0 < g(x) < \frac{\varepsilon}{4M}$, για δοσμένο $\varepsilon > 0$. Αν τώρα $x_2 > x_1 \geq x_0$ από το β΄ Θεώρημα της Μέσης Τιμής (Θεώρημα 2.24) υπάρχει $\xi \in [x_1,x_2]$ τέτοιο ώστε:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)g(x)dx = g(x_1)\int_{x_1}^{\xi} f(x)dx + g(x_2)\int_{\xi}^{x_2} f(x)dx$$

Άρα

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)g(x)dx\right| \leq g(x_1)\left|\int_{x_1}^{\xi} f(x)dx\right| + g(x_2)\left|\int_{\xi}^{x_2} f(x)dx\right|$$

$$\leq g(x_1)\cdot 2M + g(x_2)\cdot 2M$$

$$< \frac{\varepsilon}{4M}\cdot 2M + \frac{\varepsilon}{4M}\cdot 2M = \varepsilon$$

Επομένως σύμφωνα με το κριτήριο του Cauchy (θεώρημα 3.3) το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{a}^{+\infty} f(x)g(x)dx$ συγκλίνει.

2. Αν η $f:[\alpha,+\infty) \to \mathbb{R}$ είναι θετική και τοπικά ολοκληρώσιμη και

$$\lim_{x\to+\infty}\left|\frac{f(x+1)}{f(x)}\right| = k < 1$$

τότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ συγκλίνει. (Αυτό είναι το κριτήριο πηλίκων του D'Alembert για την σύγκλιση γενικευμένων ολοκληρωμάτων α΄ είδους).

Απόδειξη

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\left|\frac{f(x+1)}{f(x)}\right| = k<1$, συνεπάγεται ότι αν $0<\varepsilon<1-k$, τότε υπάρχει $\delta>0$, τέτοιο ώστε:

$$0<\left|\frac{f(x+1)}{f(x)}\right| < k+\varepsilon=\lambda<1, \ \forall x \geq \delta$$

Άρα

$$\frac{|f(x+1)|}{\lambda^{x+1}} < \frac{|f(x)|}{\lambda^{x}} \leq \frac{|f(\delta)|}{\lambda^{\delta}} = c, \quad x\geq\delta$$

ή

$$|f(x)| \leq c\cdot\lambda^{x}, \ \forall x\geq\delta$$

Επειδή $\int_{\delta}^{+\infty}\lambda^{x}dx = \int_{\delta}^{+\infty} e^{x\log\lambda}dx<+\infty$, αφού $\log\lambda<0$, από το θεώρημα 3.5

έχουμε το συμπέρασμα.

Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε το ολοκλήρωμα $\int_{1}^{+\infty} x^{2}e^{-x}dx$. Τότε επειδή

$$\lim_{x\to+\infty}\left|\frac{(x+1)^{2}e^{-(x+1)}}{x^{2}e^{-x}}\right| = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2}\cdot\frac{1}{e} = \frac{1}{e}<1$$

σύμφωνα με το παραπάνω κριτήριο το $\int_{1}^{+\infty} x^{2}e^{-x}dx$ συγκλίνει απόλυτα και συνεπώς και $\int_{1}^{+\infty}x^{2}e^{-x}dx<+\infty$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

3.16. Να εξετάσετε ως προς την απόλυτη ή υπό συνθήκη σύγκλιση τα παρακάτω ολοκληρώματα:

α) $\int_{0}^{+\infty}\frac{x\cos x}{\alpha^{2}+x^{2}}dx, \ \alpha\neq0$ β) $\int_{1}^{+\infty} x\cos(x^{4})dx$

γ) $\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^{2}+1}dx$ δ) $\int_{1}^{+\infty}\frac{x^{1/3}}{1+x^{5/3}}\sin x dx$

ε) $\int_{1}^{+\infty}\frac{\sin x}{x^{2}}dx$ στ) $\int_{1}^{+\infty}\sin\frac{1}{x^{2}}dx$

ζ) $\int_{0}^{+\infty} e^{-x}\sin kx dx$ η) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{(1+x^{2})^{2}}dx$

3.17. Να βρεθούν οι τιμές του p για τις οποίες τα παρακάτω ολοκληρώματα: i) συγκλίνουν απόλυτα ii) συγκλίνουν υπό συνθήκη.

α) $\int_{1}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^{p}}dx$ β) $\int_{2}^{+\infty}\frac{\sin x}{x(\log x)^{p}}dx$

3.18. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_{e}^{+\infty}\frac{\cos x}{\log x}dx = \int_{e}^{+\infty}\frac{\sin x}{x(\log x)^{2}}dx$$

Από αυτό να συμπεράνετε ότι το αρχικό ολοκλήρωμα συγκλίνει.

3.19. Να εξετάσετε ως προς τη σύγκλιση το ολοκλήρωμα:

$$\int_3^{+\infty} \frac{\sin t}{\log t}\,dt.$$

§ 3.5. ΣΧΕΣΗ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ Α΄ ΕΙΔΟΥΣ ΚΑΙ ΣΕΙΡΑΣ

Η έννοια του γενικευμένου ολοκληρώματος α΄ είδους βρίσκεται σε στενή σχέση με την έννοια της σειράς. Για τον λόγο αυτό και τα κριτήρια συγκλίσεως που είδαμε σε προηγούμενες παραγράφους μοιάζουν με εκείνα που είχαμε δει στην σύγκλιση των σειρών. Η σχέση γενικευμένου ολοκληρώματος και σειράς φαίνεται από το επόμενο -πολύ ισχυρό- κριτήριο:

Θεώρημα 3.10 (Ολοκληρωτικό κριτήριο του Cauchy). Έστω f μια θετική, φθίνουσα και συνεχής συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα $[1,+\infty)$. Τότε η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} f(\nu)$ και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ συγκλίνουν ή απειρίζονται θετικά συγχρόνως. Επίσης σε κάθε περίπτωση η ακολουθία

$$a_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} f(k) - \int_1^{\nu} f(x)dx$$

συγκλίνει σε ένα όριο μεταξύ 0 και f(1).

Απόδειξη

Αφού η f είναι συνεχής, θετική και φθίνουσα θα έχουμε:

$$f(k+1) \leq f(x) \leq f(k), \quad 1 \leq k \leq x \leq k+1$$

Ολοκληρώνοντας τις ανισότητες αυτές από k μέχρι k+1 παίρνουμε:

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq f(k)$$

θέτοντας $k=1,2,\ldots,\nu$ και προσθέτοντας έχουμε:

$$f(2)+f(3)+\cdots+f(\nu+1) \leq \int_1^{\nu+1} f(x)dx \leq f(1)+f(2)+\cdots+f(\nu)$$

ή

$$\sigma_{\nu+1}-f(1) \leq \int_1^{\nu+1} f(x)dx \leq \sigma_\nu \tag{1}$$

όπου $\sigma_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} f(k) = f(1)+f(2)+\cdots+f(\nu)$

Έστω $\nu \to +\infty$. Αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ συγκλίνει από την (1) έχουμε ότι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $\sigma_{\nu+1}, \nu \in \mathbb{N}$ είναι φραγμένη, αφού $\sigma_{\nu+1}-f(1) \leq \int_1^{+\infty} f(x)dx < +\infty$. Τότε όμως και η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} f(\nu)$ συγκλίνει. Αν είναι $\int_1^{+\infty} f(x)dx = +\infty$ από την δεξιά ανισότητα της (1) έχουμε ότι η $\sigma_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ δεν είναι φραγμένη. Τότε όμως $\sum_{\nu=1}^{\infty} f(\nu) = +\infty$.

Αντίστροφα, αν η σειρά συγκλίνει τότε και το $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ συγκλίνει από το θεώρημα 3.4. Έτσι το πρώτο μέρος του θεωρήματος αποδείχτηκε.

Για να αποδείξουμε το δεύτερο, παρατηρούμε ότι από την (1) είναι:

$$0 < f(\nu) \leq a_\nu \leq f(1)$$

Επί πλέον

$$a_{\nu+1} - a_\nu = f(\nu+1) - \int_\nu^{\nu+1} f(x)dx \leq 0$$

αφού $f(x) \geq f(\nu+1)$ για $\nu \leq x \leq \nu+1$. Έτσι η a_ν είναι θετική, φθίνουσα ακολουθία και άρα θα συγκλίνει σε αριθμό ℓ με $0 < \ell < f(1)$. ■

Παρατήρηση 3.11.

Από την απόδειξη του πρώτου μέρους του παραπάνω θεωρήματος, προκύπτει επίσης ότι στην περίπτωση της σύγκλισης ισχύει:

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx < \sum_{\nu=1}^{\infty} f(\nu) < f(1) + \int_1^{+\infty} f(x)dx$$

Παράδειγμα 3.20.

Επειδή από την εφαρμογή 1 της §3.2 είναι

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \frac{1}{p-1}, & p > 1 \\ +\infty, & p \leq 1 \end{cases}$$

θα έχουμε αμέσως ότι η αρμονική σειρά p-τάξης θα συγκλίνει αν $p > 1$ και θα απειρίζεται θετικά αν $p \leq 1$. Επίσης από την Παρατήρηση 3.11 θα ισχύει:

$$\frac{1}{p-1} < \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^p} < 1 + \frac{1}{p-1}.$$

Η ανισότητα αυτή είναι χρήσιμη για να προσεγγίσουμε το άθροισμα μιας σειράς όταν δεν μπορούμε να το υπολογίσουμε. Για παράδειγμα είναι $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^3} = \ell$ με $\frac{1}{2} < \ell < \frac{3}{2}$.

Παράδειγμα 3.21.

Είναι $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu}{\nu^2+1} = +\infty$. Πραγματικά θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$, $x \geq 1$. Αυτή είναι θετική και συνεχής. Επειδή $f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} \leq 0$, $\forall x \geq 1$ η f είναι και φθίνουσα. Από το Θεώρημα 3.10 η δοσμένη σειρά θα έχει την ίδια συμπεριφορά με το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} \frac{x}{x^2+1} dx$. Επειδή

$$\int_1^{+\infty} \frac{x}{x^2+1}\, dx = \lim_{\beta\to+\infty} \int_1^{\beta} \frac{x}{x^2+1}\, dx = \lim_{\beta\to+\infty} \frac{1}{2} \log \frac{\beta^2+1}{2} = +\infty$$

θα είναι και $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu}{\nu^2+1} = +\infty$.

Παρατήρηση 3.12.

Όπως είπαμε στην αρχή της παραγράφου υπάρχει μια αναλογία μεταξύ του γενικευμένου ολοκληρώματος α΄ είδους και της σειράς. Υπάρχει όμως μια πολύ σημαντική διαφορά: Αν μια σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ συγκλίνει, τότε αναγκαστικά $\lim a_\nu = 0$. Αν όμως ένα γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ συγκλίνει, τότε δεν συνεπάγεται αναγκαστικά ότι $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Έτσι στο Παράδειγμα 3.16 $\int_1^{+\infty} \cos(x^2)dx < +\infty$, αλλά το $\lim_{x\to+\infty} \cos(x^2)$ δεν υπάρχει.

Παρατήρηση 3.13.

Η υπόθεση ότι $f(x) \geq 0$ στο Θεώρημα 3.10 είναι ουσιώδης. Αν η f αλλάζει άπειρες φορές πρόσημο στο $[1,+\infty)$ τότε η σύγκλιση του γενικευμένου ολοκληρώματος $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ συνεπάγεται την σύγκλιση της σειράς $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ με $a_\nu = \int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} f(x)dx$, όπου $x_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ αύξουσα ακολουθία με $x_\nu \to +\infty$, ενώ γενικά το αντίστροφο δεν ισχύει. Για παράδειγμα είναι:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \int_{2\nu\pi}^{2(\nu+1)\pi} \sin x dx = \sum_{\nu=0}^{\infty} 0 = 0$$

ενώ το $\int_0^{+\infty} \sin x dx$ δεν συγκλίνει (Παράδειγμα 3.4).

Παρατήρηση 3.14.

Το ολοκληρωτικό κριτήριο του Cauchy είναι πολύ ισχυρό κριτήριο για την σύγκλιση μια σειράς και εφαρμόζεται συνήθως όταν το κριτήριο πηλίκων του D'Alembert ή το κριτήριο ν-οστής ρίζας του Cauchy δεν δίνουν απάντηση. Όμως η συνθήκη ότι η f είναι θετική και φθίνουσα περιορίζουν κατά πολύ τις περιπτώσεις που μπορεί αυτό να εφαρμοστεί. Αποδεικνύεται ότι ισχύει η επόμενη πιο γενική σχέση η οποία καλύπτει μια πιο ευρεία κλάση συναρτήσεων. Ισχύει ο επόμενος τύπος των Mac-Laurin-Euler:

$$\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\kappa) = \int_1^{\nu} f(x)dx + \int_1^{\nu} \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) f'(x)dx + \frac{1}{2}[f(1) + f(\nu)].$$

Από τον παραπάνω τύπο προκύπτει εύκολα ότι η σειρά $\sum_{x=1}^{\infty} f(x)$ συγκλίνει, αν τα γενικευμένα ολοκληρώματα

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx \quad \text{και} \quad \int_1^{+\infty}|f'(x)|dx$$

υπάρχουν.

Παράδειγμα 3.22.

Είναι $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin\sqrt{\nu}}{\nu}<+\infty$. Πραγματικά έστω $f(x)=\frac{\sin\sqrt{x}}{x}$. Τότε:

$$f'(x)=\left|\frac{\frac{1}{2}\sqrt{x}\cos\sqrt{x}-\sin\sqrt{x}}{x^2}\right|<\frac{\sqrt{x}+1}{x^2} \quad \text{και} \quad \int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x^2}dx=2$$

Επίσης

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin\sqrt{x}}{x}dx=2\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt<+\infty \quad \text{(Παράδειγμα 3.8)}$$

Άρα από την παραπάνω Παρατήρηση η δοσμένη σειρά συγκλίνει.

Παρατήρηση 3.15.

Με την βοήθεια των σειρών έχουμε και το παρακάτω, πολύ χρήσιμο κριτήριο για να συγκλίνει ένα γενικευμένο ολοκλήρωμα α' είδους υπό συνθήκη. Το αναφέρουμε χωρίς απόδειξη.

Έστω $f:[\alpha,+\infty)\to\mathbb{R}$ μια φθίνουσα και μη-δενική συνάρτηση. Τότε το ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} f(x)\sin x\,dx$ συγκλίνει υπό συνθήκη αν η σειρά $\sum_{k=m}^{\infty} f(k\pi)$, $m\pi\geq\alpha$ απειρίζεται θετικά.

Για παράδειγμα το $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ συγκλίνει υπό συνθήκη αφού $\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=+\infty$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α και β ώστε η συνάρτηση

$$f(x)=\int_x^{+\infty}(t^2+\alpha t+\beta)e^{-t}dt$$

και η παράγωγός της, να μηδενίζονται για $x=1$. Είναι η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} f(\nu)$ συγκλίνουσα;

Λύση

Είναι:

$$f(x)=\lim_{k\to+\infty}\int_x^k(t^2+\alpha t+\beta)e^{-t}dt=\lim_{k\to+\infty}\left\{-\int_x^k(t^2+\alpha t+\beta)de^{-t}\right\}$$

$$=\lim_{k\to+\infty}\left\{-(t^2+\alpha t+\beta)e^{-t}\Big|_x^k+\int_x^k(2t+\alpha)e^{-t}dt\right\}$$

$$=\lim_{k\to+\infty}\left\{-\frac{k^2+\alpha k+\beta}{e^k}+(x^2+\alpha x+\beta)e^{-x}-\int_x^k(2t+\alpha)de^{-t}\right\}$$

$$=\lim_{k\to+\infty}\left\{-\frac{k^2+\alpha k+\beta}{e^k}+(x^2+\alpha x+\beta)e^{-x}-\frac{2k+\alpha}{e^k}+(2x+\alpha)e^{-x}-2e^{-k}+2e^{-x}\right\}$$

$$=e^{-x}\{x^2+(\alpha+2)x+\alpha+\beta+2\}$$

Επίσης

$$f'(x)=-e^{-x}(x^2+\alpha x+\beta)$$

Επειδή $f(1)=0$ και $f'(1)=0$ θα έχουμε:

$$1+\alpha+2+\alpha+\beta=2$$

$$1+\alpha+\beta=0$$

απ' όπου βρίσκουμε $\alpha=-4$ και $\beta=3$.

Έτσι $f(x)=e^{-x}(x-1)^2, x\in\mathbb{R}$. Αυτή είναι φθίνουσα για $x>3$ και θετική. Έτσι από το θεώρημα 3.10 η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} f(\nu)=\sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\nu}(\nu-1)^2$ συγκλίνει, αφού $\int_1^{+\infty}e^{-x}(x-1)^2dx<+\infty$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

3.20. Να αποδείξετε ότι η ακολουθία $\alpha_\nu = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{\nu} - \log\nu, \nu \in \mathbb{N}$ συγκλίνει. (Το όριο της ακολουθίας αυτής συμβολίζεται με γ και λέγεται σταθερή του Euler και είναι $\gamma = 0.5772156649\ldots$)

3.21. Να εξετάσετε ως προς τη σύγκλιση τις παρακάτω σειρές:

α) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu e^{-\nu^2}$ β) $\sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{1}{\nu(\log\nu)^p}$ γ) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\log\nu}{\nu}$

δ) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{e^{\mathrm{Artg}\nu}}{1+\nu^2}$ ε) $\sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{\sin(\log\nu)}{\nu}$

στ) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ με $\alpha_\nu = \int_0^{1/\nu} x^{1/3}(1+x)dx$

ζ) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ με $\alpha_\nu = \int_0^{1/\nu} \frac{x^{2/3}}{1+x^3}dx$

§ 3.6. ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ Β' ΕΙΔΟΥΣ

Θα ασχοληθούμε τώρα με γενικευμένα ολοκληρώματα μη φραγμένων συναρτήσεων, δηλ. συναρτήσεων που ορίζονται σε διάστημα της μορφής $(\alpha,\beta]$ ή $[\alpha,\beta)$ ή (α,β). Τότε ορίζουμε:

Ορισμός: 3.7. Έστω $f:(\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ μια τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τότε ορίζουμε:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \lim_{k\to\alpha^+} \int_k^\beta f(x)dx \qquad (1)$$

Όμοια αν $f:[\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$ είναι μια τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση, τότε ορίζουμε:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \lim_{\lambda\to\beta^-} \int_\alpha^\lambda f(x)dx \qquad (2)$$

Αν τα όρια (1) και (2) υπάρχουν τότε λέμε ότι τα γενικευμένα ολοκληρώματα υπάρχουν ή συγκλίνουν. Αν τα όρια δεν υπάρχουν τότε λέμε ότι τα γενικευμένα ολοκληρώματα αποκλίνουν. Αν κάποιο από τα όρια είναι $+\infty$ (αντίστοιχα $-\infty$) τότε λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα απειρίζεται θετικά (αντίστοιχα αρνητικά).

Τέλος αν $f:(\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$ είναι μια τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση, τότε ορίζουμε:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\gamma f(x)dx + \int_\gamma^\beta f(x)dx, \quad \alpha < \gamma < \beta \qquad (3)$$

Παράδειγμα 3.23.

Από το Παράδειγμα 3.1 έχουμε ότι η συνάρτηση $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & x \in (0,1] \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

είναι τοπικά ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[\alpha,1]$, με $0<\alpha<1$. Συνεπώς

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{k\to0^+} \int_k^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{k\to0^+} 2(1-\sqrt{k}) = 2$$

Παράδειγμα 3.24.

Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{(1-x)^p}$ είναι τοπικά ολοκληρώσιμη στο $[0,1)$. Άρα

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^p} = \lim_{\lambda\to1^-} \int_0^\lambda \frac{dx}{(1-x)^p} = \lim_{\lambda\to1^-} \begin{cases} \frac{(1-\lambda)^{-p+1}-1}{p-1}, & p \neq 1 \\ -\log(1-\lambda), & p = 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{1-p}, & p<1 \\ +\infty, & p \geq 1 \end{cases}$$

Παράδειγμα 3.25.

Το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{dx}{x\log x}$ είναι γενικευμένο και στο 0 και στο 1. Τότε

$$\int_0^1 \frac{dx}{x\log x} = \int_0^\gamma \frac{dx}{x\log x} + \int_\gamma^1 \frac{dx}{x\log x} = \lim_{k\to 0+}\int_k^\gamma \frac{dx}{x\log x} + \lim_{\lambda\to 1-}\int_\gamma^\lambda \frac{dx}{x\log x}$$

$$= \lim_{k\to 0+}\log|\log x|_k^\gamma + \lim_{\lambda\to 1-}\log|\log x|_\gamma^\lambda = -\infty$$

Παρατήρηση 3.16.

Ο Ορισμός 3.7 εφαρμόζεται ανάλογα και στην περίπτωση που η f δεν είναι φραγμένη σε κάποιο εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της. Για παράδειγμα το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x}$ είναι γενικευμένο στο $0\in[-1,1]$. Τότε

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x} + \int_0^1 \frac{dx}{x}$$

Αφού $\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{k\to 0+}\int_k^1 \frac{dx}{x} = \lim_{k\to 0+}(-\log k) = +\infty$ το παραπάνω ολοκλήρωμα δεν συγκλίνει.

Παρατηρούμε όμως ότι

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\left\{\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{dx}{x} + \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x}\right\} = 0$$

Έτσι λοιπόν γενικά αν η f δεν είναι φραγμένη στο $\gamma \in [\alpha,\beta]$ και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ δεν υπάρχει, ενώ το

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\left\{\int_\alpha^{\gamma-\varepsilon} f(x)dx + \int_{\gamma+\varepsilon}^\beta f(x)dx\right\}$$

υπάρχει, τότε αυτό το όριο το λέμε "πρωτεύουσα τιμή κατά Cauchy" και το συμβολίζουμε

$$C\cdot P\cdot V\int_\alpha^\beta f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0+}\left\{\int_\alpha^{\gamma-\varepsilon} f(x)dx + \int_{\gamma-\varepsilon}^\beta f(x)dx\right\}$$

Παρατήρηση 3.17.

Ας θεωρήσουμε το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Αυτό συγκλίνει, αφού

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\lambda\to 1-}\int_0^\lambda \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\lambda\to 1-}[\mathrm{Arsin}\lambda - \mathrm{Arsin}0] = \frac{\pi}{2}$$

Αν κάνουμε αλλαγή μεταβλητής, θέτοντας $x=\sin t$ τότε αυτό μετασχηματίζεται στο

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\pi/2}\frac{\cos t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}dt = \int_0^{\pi/2} dt$$

που είναι ορισμένο ολοκλήρωμα και έχει τιμή $\frac{\pi}{2}$.

Επίσης αν κάνουμε μια άλλη αντικατάσταση, θέτοντας $x=1-\frac{1}{t}$ αυτό μετασχηματίζεται στο

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_1^{+\infty}\frac{dt}{t(2t-1)^{1/2}}$$

που είναι γενικευμένο ολοκλήρωμα α΄ είδους, και μπορούμε εύκολα με τα κριτήρια συγκλίσεως της §3.3 να αποδείξουμε ότι αυτό συγκλίνει.

Μπορεί επίσης και ένα ορισμένο ολοκλήρωμα με μια αντικατάσταση να μετατραπεί σε γενικευμένο, όπως για παράδειγμα η αντικατάσταση $t=\mathrm{tg}\frac{x}{2}$ στο ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_{\pi/2}^\pi \frac{dx}{1-\cos x}$ το μετατρέπει στο γενικευμένο α΄ είδους $\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^2}$.

Γενικά, με μια κατάλληλη αντικατάσταση ένα γενικευμένο ολοκλήρωμα β΄ είδους μετατρέπεται σε γενικευμένο ολοκλήρωμα α΄ είδους και αντίστροφα. Οι αντικαταστάσεις και οι μετατροπές φαίνονται στους πίνακες που ακολουθούν:

ΠΙΝΑΚΑΣ Ι (β' είδους → α' είδους)

Γενικευμένο ολοκλήρωμα β' είδους	Αντικατάσταση	Γενικευμένο ολοκλήρωμα α' είδους
$\int_\alpha^\beta f(x)dx$ $\alpha < x \leq \beta$	$x=\alpha+\frac{1}{t}$	$\int_{1/(\beta-\alpha)}^{+\infty} \frac{1}{t^2} f\left(\alpha+\frac{1}{t}\right) dt$
	$x=\alpha-\frac{1}{t}$	$\int_{-\infty}^{-1/(\beta-\alpha)} \frac{1}{t^2} f\left(\alpha-\frac{1}{t}\right) dt$
$\int_\alpha^\beta f(x)dx$ $\alpha \leq x < \beta$	$x=\beta-\frac{1}{t}$	$\int_{1/(\beta-\alpha)}^{+\infty} \frac{1}{t^2} f\left(\beta-\frac{1}{t}\right) dt$
	$x=\beta+\frac{1}{t}$	$\int_{-\infty}^{-1/(\beta-\alpha)} \frac{1}{t^2} f\left(\beta+\frac{1}{t}\right) dt$

ΠΙΝΑΚΑΣ ΙΙ (α' είδους → β' είδους)

Γενικευμένο ολοκλήρωμα α' είδους	Αντικατάσταση	Γενικευμένο ολοκλήρωμα β' είδους
$\int_\alpha^{+\infty} f(x)dx$	$x=\frac{1}{t-\beta}$	$\int_\beta^{\beta+(1/\alpha)} \frac{1}{(t-\beta)^2} f\left(\frac{1}{t-\beta}\right)dt$
	$x=\frac{1}{\beta-t}$	$\int_{\beta-(1/\alpha)}^{\beta} \frac{1}{(\beta-t)^2} f\left(\frac{1}{\beta-t}\right)dt$
$\int_{-\infty}^{\alpha} f(x)dx$	$x=\frac{1}{\beta-t}$	$\int_\beta^{\beta-(1/\alpha)} \frac{1}{(\beta-t)^2} f\left(\frac{1}{\beta-t}\right)dt$
	$x=\frac{1}{t-\beta}$	$\int_{\beta+(1/\alpha)}^{\beta} \frac{1}{(t-\beta)^2} f\left(\frac{1}{t-\beta}\right)dt$

Παράδειγμα 3.26.

Το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \log\frac{1}{1-x}\,dx$ είναι γενικευμένο β' είδους στο 1. Από τον πίνακα Ι έχουμε ότι με την αντικατάσταση $x=1-\frac{1}{t}$ μετατρέπεται στο γενικευμένο α' είδους $\int_1^{+\infty}\frac{\log t}{t^2}dt$. Το ολοκλήρωμα αυτό συγκλίνει, αφού

$$\int_1^{+\infty}\frac{\log t}{t^2}\,dt=\lim_{k\to+\infty}\left[-\frac{1}{t}(\log t+1)\right]_1^k=1$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να αποδείξετε ότι υπάρχει η

$$C\cdot P\cdot V\int_{1/2}^{x}\frac{dt}{\log t}\ ,\ x>1$$

Απόδειξη

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση

$$f(\delta)=\int_{1/2}^{1-\delta}\frac{dx}{\log x}+\int_{1+\delta}^{3/2}\frac{dx}{\log x}\ ,\ 0<\delta<\frac{1}{2}$$

έχει όριο όταν $\delta\to 0+$. Θέτοντας $t=1-u$ στο πρώτο ολοκλήρωμα του δεύτερου μέλους και $t=1+u$ στο δεύτερο έχουμε:

$$f(\delta)=\int_\delta^{1/2}\frac{du}{\log(1-u)}+\int_\delta^{1/2}\frac{du}{\log(1+u)}$$

$$=\int_\delta^{1/2}\frac{\log(1-u^2)}{\log(1-u)\log(1+u)}\,du$$

Επειδή $\lim\limits_{u\to 0+}\frac{\log(1-u^2)}{\log(1-u)\log(1+u)}=1$ (με εφαρμογή του κανόνα του L'Hospital) θα είναι

$$\frac{\log(1-u^2)}{\log(1-u)\log(1+u)}<1,\ \forall u\geq u_0$$

Συνεπώς

$$f(\delta)=\int_{\delta}^{1/2}\frac{\log(1-u^2)}{\log(1-u)\log(1+u)}\,du<\int_{\delta}^{1/2}du=\frac{1}{2}-\delta$$

και έτσι το όριο της $f(\delta)$ όταν $\delta\to 0+$ υπάρχει.

Σημείωση

Η συνάρτηση $lix=\int_{1/2}^{x}\frac{dt}{\log t}$, $0<x\neq 1$ λέγεται "σ υ ν ά ρ τ η σ η λ ο γ α ρ ι θ μ ι κ ό ο λ ο κ λ ή ρ ω μ α" και παρουσιάζεται στην θεωρία Αριθμών, όπου αποδεικνύεται ότι είναι μια πολύ καλή προσέγγιση του πλήθους των πρώτων αριθμών που είναι $\leq x$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

3.22. Να αποδείξετε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα β΄είδους $\int_0^1\left(\log\frac{1}{x}\right)^3dx$ με την αντικατάσταση $t=\log\frac{1}{x}$ μετατρέπεται σε γενικευμένο α΄ είδους. Να εξετάσετε επίσης αν το ολοκλήρωμα αυτό συγκλίνει.

3.23. Να εξετάσετε ως προς τη σύγκλιση τα ολοκληρώματα:

α) $\int_{\alpha}^{\beta}\frac{dx}{(x-\alpha)^p}$ β) $\int_0^2\frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}}$

γ) $\int_0^1\frac{x^3+\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt[5]{x^3}}dx$ δ) $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x\sqrt[3]{x}}$

3.24. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_0^1\frac{x^{\nu}}{\sqrt{1-x^2}}dx=\begin{cases}\frac{\nu-1}{\nu}\cdot\frac{\nu-3}{\nu-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, & \nu \text{ άρτιος}\\[2mm] \frac{\nu-1}{\nu}\cdot\frac{\nu-3}{\nu-2}\cdots\frac{2}{3}, & \nu \text{ περιττός}\end{cases}$$

3.25. Να αποδείξετε ότι η πρωτεύουσα τιμή υπάρχει για το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}dx$ και ισούται με 0, ενώ δεν υπάρχει για το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^{1}\frac{1}{|x|}dx$.

3.26. Έστω $I_{\nu}=\int_0^1x^{\alpha}(\log x)^{\nu}dx$, $\nu\in\mathbb{N}$, $\alpha>-1$. Να αποδείξετε ότι:

$$I_{\nu}=(-1)^{\nu}\frac{\nu!}{(\alpha+1)^{\nu+1}}$$

§ 3.7. ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΣΥΓΚΛΙΣΕΩΣ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ Β΄ ΕΙΔΟΥΣ

Όπως είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο ένα γενικευμένο ολοκλήρωμα β΄ είδους μετατρέπεται με μια κατάλληλη αντικατάσταση σε γενικευμένο ολοκλήρωμα α΄ είδους. Έτσι η γνώση των κριτηρίων συγκλίσεως γενικευμένων ολοκληρωμάτων α΄ είδους, καλύπτει και τα γενικευμένα ολοκληρώματα β΄ είδους. Εν τούτοις θα αναφέρουμε τα κριτήρια αυτά μόνο για την περίπτωση που έχουμε γενικευμένο ολοκλήρωμα της μορφής $\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx$, $x\in(\alpha,\beta]$. Ανάλογα κριτήρια διατυπώνονται και για τις άλλες περιπτώσεις. Οι αποδείξεις τους είναι ανάλογες με αυτές των κριτηρίων α΄ είδους και παραλείπονται. Θα δώσουμε μόνο την απόδειξη του κριτηρίου συγκρίσεως

Θεώρημα 3.12 (Κριτήριο του Cauchy). Έστω $f:(\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ μια τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx$ συγκλίνει, αν και μόνο αν, για κάθε $\varepsilon>0$, υπάρχει $\delta>0$, τέτοιο ώστε για κάθε $x_1,x_2\in(\alpha,\beta]$ με $|x_1-\alpha|<\delta$, $|x_2-\alpha|<\delta$ να έχουμε: $\left|\int_{x_1}^{x_2}f(x)dx\right|<\varepsilon$.

Θεώρημα 3.13. Έστω $f:(\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ μια μη αρνητική και τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τότε το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx$ συγκλίνει, αν η συνάρτηση $F(x)=\int_x^{\beta}f(t)dt$ είναι φραγμένη στο $(\alpha,\beta]$ και απειρίζεται αν η F δεν είναι φραγμένη.

Θεώρημα 3.14 (Κριτήριο συγκρίσεως). Έστω $f,g:(\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ δυο τοπικά ολοκληρώσιμες συναρτήσεις, τέτοιες ώστε:

$$0 \leq f(x) \leq g(x),\quad \alpha < x \leq \beta$$

Τότε:

i) $\displaystyle\int_\alpha^\beta g(x)dx <+\infty \Rightarrow \int_\alpha^\beta f(x)dx <+\infty$

ii) $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)dx =+\infty \Rightarrow \int_\alpha^\beta g(x)dx =+\infty$

Απόδειξη

Από τον πίνακα I της §3.6 η αντικατάσταση $x=\alpha+\frac{1}{t}$ μας οδηγεί στο ολοκλήρωμα:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_{1/(\beta-\alpha)}^{+\infty}\frac{1}{t^2}\, f\left(\alpha+\frac{1}{t}\right)dt$$

Αφού από την υπόθεση

$$0\leq f\left(\alpha+\frac{1}{t}\right)\leq g\left(\alpha+\frac{1}{t}\right),\quad \alpha<\alpha+\frac{1}{t}\leq\beta$$

θα έχουμε:

$$0\leq\frac{1}{t^2}\, f\left(\alpha+\frac{1}{t}\right)\leq\frac{1}{t^2}\, g\left(\alpha+\frac{1}{t}\right),\quad \frac{1}{\beta-\alpha}\leq t<+\infty$$

Επομένως από το Θεώρημα 3.5 προκύπτει άμμεσα το συμπέρασμα. ■

Θεώρημα 3.15 (Οριακό κριτήριο συγκρίσεως). Έστω $f,g:(\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ δυο τοπικά ολοκληρώσιμες συναρτήσεις με $f(x)\geq 0$ και $g(x)>0$, $\forall x\in(\alpha,\beta]$. Αν $\displaystyle\lim_{x\to\alpha+}\frac{f(x)}{g(x)}=\ell$, τότε:

i) Αν $0<\ell<+\infty$ τότε $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)dx <+\infty \Leftrightarrow \int_\alpha^\beta g(x)dx <+\infty$

ii) Αν $\ell=0$ και $\displaystyle\int_\alpha^\beta g(x)dx <+\infty \Rightarrow \int_\alpha^\beta f(x)dx <+\infty$

iii) Αν $\ell=+\infty$ και $\displaystyle\int_\alpha^\beta g(x)dx=+\infty \Rightarrow \int_\alpha^\beta f(x)dx=+\infty$

Πόρισμα: Έστω $f:(\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ μια τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τότε:

α) Αν $\displaystyle\lim_{x\to\alpha+}(x-\alpha)^p\cdot f(x)=\ell,\ 0<p<1 \Rightarrow \int_\alpha^\beta f(x)dx <+\infty$

β) Αν $\displaystyle\lim_{x\to\alpha+}(x-\alpha)^p\cdot f(x)=\ell,\ 0<\ell<+\infty, p\geq 1 \Rightarrow \int_\alpha^\beta f(x)dx=+\infty$

Παράδειγμα 3.27.

Είναι $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{(1-x^3)^{1/3}}<+\infty$

Πραγματικά θέτοντας $f(x)=\dfrac{1}{(1-x^3)^{1/3}}=\dfrac{1}{(1-x)^{1/3}(1+x+x^2)^{1/3}}$ και $g(x)=\dfrac{1}{(1-x)^{1/3}}$ έχουμε:

$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to1-}\frac{1}{(1+x+x^2)^{1/3}}=\frac{1}{3^{1/3}}$$

Επειδή $\displaystyle\int_0^1 g(x)dx<+\infty$, από το Παράδειγμα 3.24, από το Θεώρημα 3.15(διατυπωμένο στην περίπτωση του διαστήματος $[\alpha,\beta)$)έχουμε το συμπέρασμα.

Παράδειγμα 3.28.

Ας θεωρήσουμε τώρα το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_0^1\sin\frac{1}{x}dx$. Θέτοντας $x=\frac{1}{t}$ έχουμε:

$$\int_0^1\sin\frac{1}{x}dx=\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t^2}dt$$

Το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t^2}dt$ συγκλίνει απόλυτα, αφού $\displaystyle\left|\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t^2}dt\right|\leq\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^2}<+\infty$ και άρα και απλά από το Θεώρημα 3.7. Συνεπώς και $\displaystyle\int_0^1\sin\frac{1}{x}dx<+\infty$.

Παρατήρηση 3.18.

Για να εξετάσουμε αν ένα γενικευμένο ολοκλήρωμα β΄ είδους συγκλίνει απόλυτα ή υπό συνθήκη, το μετασχηματίζουμε σε γενικευμένο ολοκλήρωμα α΄ είδους και εφαρμόζουμε τα κριτήρια που αναφέραμε στην §3.4.

Παράδειγμα 3.29.

Έστω το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^p}dx$, $p>0$. Με την αντικατάσταση $x=\frac{1}{t}$ μετασχηματίζεται στο

$$I=\int_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^p}dx=\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t^{2-p}}dt$$

Από το Παράδειγμα 3.17 το ολοκλήρωμα του δεξιά μέλους συγκλίνει αν $2-p>0$ ή $p<2$. Άρα το I συγκλίνει αν $0<p<2$.

Από το Θεώρημα 3.9 με $f(x)=\sin x$ και $\varphi(x)=x^{-2+p}$ έχουμε ότι συγκλίνει απόλυτα αν $2-p>1$ ή $0<p<1$ και υπό συνθήκη αν $2-p<1$ ή $1\leq p<2$. (Αυτό προκύπτει και από την Παρατήρηση 3.15 θεωρώντας την σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^{2-p}}$)

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Για ποιές τιμές του p συγκλίνει το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi}\frac{dx}{(\sin x)^p}$;

Λύση

Αυτό είναι γενικευμένο ολοκλήρωμα β΄ είδους και γράφεται:

$$\int_0^{\pi}\frac{dx}{(\sin x)^p}=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{(\sin x)^p}+\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{dx}{(\sin x)^p}$$

Αρκεί να βρούμε τις τιμές του p για τις οποίες συγκλίνει το πρώτο ολοκλήρωμα του δεύτερου μέλους, αφού το δεύτερο ολοκλήρωμα με την αντικατάσταση $x=\pi-t$ ανάγεται στο πρώτο.

Επειδή $\lim_{x\to 0+} x^p\frac{1}{(\sin x)^p}=1$ το ολοκλήρωμα θα συγκλίνει αν $0<p<1$, από το Πόρισμα του Θεωρήματος 3.15.

2. Να αποδείξετε ότι: $I=\int_0^{\pi}\log(\sin x)dx=-\pi\log 2$

Απόδειξη

Έχουμε:

$$I=\int_0^{\pi}\log(\sin x)dx=\int_0^{\pi}\log\left\{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right\}dx$$

$$=\int_0^{\pi}\log 2dx+\int_0^{\pi}\log\left(\sin\frac{x}{2}\right)dx+\int_0^{\pi}\log\left(\cos\frac{x}{2}\right)dx$$

$$=I_1+I_2+I_3$$

Όμως: $I_1=\pi\log 2$

$$I_2=\int_0^{\pi}\log\left(\sin\frac{x}{2}\right)dx=2\int_0^{\pi/2}\log(\sin t)dt \qquad (x=2t)$$

$$=\int_0^{\pi}\log(\sin x)dx$$

$$I_3=\int_0^{\pi}\log\left(\cos\frac{x}{2}\right)dx=2\int_0^{\pi/2}\log(\sin t)dt \qquad (x=\pi-2t)$$

$$=\int_0^{\pi}\log(\sin x)dx \qquad \text{(άσκηση 2.37α)}$$

Άρα:

$$I=\pi\log 2+2I \quad ή \quad I=-\pi\log 2.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

3.27. Να εξετάσετε ως προς τη σύγκλιση τα ολοκληρώματα:

α) $\int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{x}}\,dx$ β) $\int_0^1 \frac{\cos\frac{1}{x}}{x}\,dx$ θέτω $\frac{1}{x}=t$

γ) $\int_0^\pi \frac{\log x}{x+1}\,dx$ δ) $\int_0^1 \frac{dx}{\sin x}$

3.28. Να βρεθούν οι τιμές του p για τις οποίες τα παρακάτω ολοκληρώματα συγκλίνουν:

α) $\int_0^1 \frac{dx}{x^p\left(1+\log\frac{1}{x}\right)}$ β) $\int_\pi^{4\pi} \frac{\sin x}{(x-\pi)^p}\,dx$

γ) $\int_0^1 x^p \sin\frac{1}{x}\,dx$

3.29. Να αποδείξετε ότι τα ολοκληρώματα

α) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\sin\frac{1}{x}\,dx$ και β) $\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{\log x}}$

συγκλίνουν.

3.30. Να αποδείξετε ότι:

α) $\int_0^{\pi/2} \log(\sin x)dx=-\frac{\pi}{2}\log 2$

β) $\int_0^\pi x\log(\sin x)dx=-\frac{\pi^2}{2}\log 2$

γ) $\int_0^\pi \log(2\sin x)dx=0$

δ) $\int_0^\pi x\log(2\sin x)dx=0$

ε) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\log\frac{1}{x}}}=\sqrt{\pi}$

§ 3.8. ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΜΙΚΤΟΥ ΕΙΔΟΥΣ

Πολλά από τα γενικευμένα ολοκληρώματα που εμφανίζονται στην πράξη είναι μικτού είδους, δηλ. η συνάρτηση δεν είναι φραγμένη και το διάστημα ολοκλήρωσης είναι απέραντο. Τέτοια ολοκληρώματα διασπώνται εύκολα σε δυο ολοκληρώματα ενός α' είδους και ενός δευτέρου. Επίσης ένα ολοκλήρωμα μικτού είδους μπορεί να χωριστεί σε περισσότερα γενικευμένα ολοκληρώματα α' ή β' είδους. Αυτό μπορεί να συμβεί για παράδειγμα αν έχουμε $\int_\alpha^{+\infty} f(x)dx, x\in(\alpha,+\infty)$ και η f δεν ορίζεται σε πεπερασμένα σημεία του $(\alpha,+\infty)$.

Ας δούμε αναλυτικά μερικά παραδείγματα:

Παράδειγμα 3.30.

Ας θεωρήσουμε το ολοκλήρωμα $I=\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx$. Αυτό είναι μικτού είδους και για να μελετήσουμε την σύγκλισή του το διασπάμε στα I_1 και I_2 όπου:

$$I=I_1+I_2=\int_0^1\frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx$$

Το I_1 είναι β' είδους και το I_2 είναι α' είδους. Για το I_1 έχουμε:

$$\left|\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\right|\leq\frac{1}{\sqrt{x}},\ x\in(0,1].$$

Επειδή από το Παράδειγμα 3.23 το $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}$ συγκλίνει, από το Θεώρημα 3.14 έχουμε ότι και το I_1 συγκλίνει.

Για το I_2 παρατηρούμε ότι αν θέσουμε $\sqrt{x}=\omega$ αυτό γίνεται:

$$I_2=\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx=2\int_1^{+\infty}\cos(\omega^2)d\omega$$

που συγκλίνει, από το Παράδειγμα 3.16. Αφού τα I_1 και I_2 συγκλίνουν, συνεπάγεται ότι και το I συγκλίνει. Η σύγκλιση είναι υπό συνθήκη αφού

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi\nu}}=+\infty.$$

Παράδειγμα 3.31.

Θα βρούμε τώρα τις τιμές της παραμέτρου α για τις οποίες το γενικευμένο ολοκλήρωμα $I=\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx$ συγκλίνει. Είναι

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx=\int_0^{1}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx+\int_1^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx=I_1+I_2$$

θέτοντας στο I_1 $x=\frac{1}{t}$ έχουμε:

$$I_1=\int_0^{1}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx=\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^{\alpha+1}\left(1+\frac{1}{t}\right)}$$

Τότε έχουμε $t^{p}\cdot\frac{1}{t^{\alpha+1}\left(1+\frac{1}{t}\right)}=\frac{t^{p-\alpha-1}}{1+\frac{1}{t}}$ που έχει όριο μηδέν αν $p-\alpha-1<0$.

Συνεπώς το I_1 συγκλίνει αν $p>1$ και $p-\alpha-1<0$ δηλ. $1<p<\alpha+1$ ή $\alpha>0$

Για το I_2 είναι $x^{p}\cdot\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}=\frac{x^{p+\alpha-2}}{1+\frac{1}{x}}$ που έχει όριο μηδέν αν $p+\alpha-2<0$. Άρα το I_2 συγκλίνει αν $p>1$ και $p+\alpha-2<0$, δηλ. για $\alpha<1$. Τα παραπάνω συνοψίζονται στον ακόλουθο πίνακα:

	$\alpha\leqslant 0$	$0<\alpha<1$	$\alpha\geqslant 1$
I_1	δεν συγκλίνει	συγκλίνει	ορισμένο
I_2	δεν συγκλίνει	συγκλίνει	δεν συγκλίνει
I	δεν συγκλίνει	συγκλίνει	δεν συγκλίνει

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. (Γάμμα συνάρτηση). Να αποδείξετε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}dt,\ x>0$$

συγκλίνει. Επίσης να αποδείξετε ότι:

α) $\Gamma(\nu)=(\nu-1)!$, $\nu\in\mathbb{N}$

β) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$

Απόδειξη

Αν $x\geqslant 1$ τότε το $\Gamma(x)$ είναι γενικευμένο ολοκλήρωμα α΄ είδους και συγκλίνει, γιατί σύμφωνα με το θεώρημα 3.6 έχουμε:

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{t^{x-1}e^{-t}}{\frac{1}{t^2}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t^{x+1}}{e^{t}}=0$$

και $\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^2}<+\infty$.

Αν $x<1$ τότε το $\Gamma(x)$ είναι μικτού είδους και γράφεται:

$$\Gamma(x)=\int_0^{1}t^{x-1}e^{-t}dt+\int_1^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}dt$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα είναι γενικευμένο β΄ είδους και θέτοντας $t=\frac{1}{\omega}$ έχουμε:

$$\int_0^{1}t^{x-1}e^{-t}dt=\int_1^{+\infty}\omega^{-x-1}e^{-(1/\omega)}d\omega$$

Επειδή

$$\lim_{\omega\to+\infty}\frac{e^{-(1/\omega)}\cdot\omega^{-x-1}}{\omega^{-x-1}}=1$$

και $\int_1^{+\infty}\omega^{-x-1}d\omega<+\infty$ για $x>0$ συνεπάγεται ότι:

$$\int_0^{1}t^{x-1}e^{-t}dt<+\infty.$$

Συνεπώς το $\Gamma(x)$ συγκλίνει.

Εφαρμόζοντας στο $\Gamma(x)$ παραγοντική ολοκλήρωση και λαμβάνοντας υπόψη ότι $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha}}{e^{x}}=0$, έχουμε:

$$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}dt=-\int_0^{+\infty}t^{x-1}de^{-t}$$

$$=-t^{x-1}\cdot e^{-t}\Big|_0^{+\infty}+(x-1)\int_0^{+\infty}t^{x-2}e^{-t}dt=(x-1)\Gamma(x-1)$$

Από την σχέση αυτή με διαδοχική εφαρμογή παίρνουμε:

$$\Gamma(\nu)=(\nu-1)!\Gamma(1)$$

Επειδή $\Gamma(1)=\int_0^{+\infty} e^{-t}dt=1$ (Παράδειγμα 3.3) από την παραπάνω σχέση έχουμε $\Gamma(\nu)=(\nu-1)!$ δηλ. την α).

Για την β) έχουμε:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{+\infty} t^{-1/2}e^{-t}dt$$

θέτουμε $t=\omega^2$. Τότε είναι:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt=2\int_0^{+\infty}e^{-\omega^2}d\omega=2\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\sqrt{\pi}$$

από την εφαρμογή 4 της § 3.3.

2. Να αποδείξετε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$$

συγκλίνει, αν $0<x,\ y<1$. (Βήτα συνάρτηση)

Απόδειξη

Έχουμε:

$$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt=\int_0^c t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt+\int_c^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt,\ 0<c<1$$

Επειδή

$$\lim_{t\to 0+} t^{1-x}\cdot f(t)=\lim_{t\to 0}(1-t)^{y-1}=1$$

και

$$\lim_{t\to 1-}(1-t)^{1-y}f(t)=\lim_{t\to 1-} t^{x-1}=1$$

από το Πόρισμα του Θεωρήματος 3.15 έχουμε ότι το ολοκλήρωμα $\int_1^c t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ συγκλίνει αν $0<1-x<1$ και το ολοκλήρωμα $\int_c^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ συγκλίνει αν $0<1-y<1$. Άρα το $B(x,y)$ συγκλίνει αν $0<x<1$ και $0<y<1$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

3.31. Να αποδείξετε ότι:

α) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=\frac{\pi}{2}$ β) $\int_0^{+\infty}\frac{x\log x}{(1+x^2)^2}dx=0$

3.32. Να εξετάσετε ως προς τη σύγκλιση τα ολοκληρώματα:

α) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$ β) $\int_0^{+\infty}\frac{(e^{-x}-1)^2}{x^3}dx$

γ) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ δ) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$

3.33. Υπάρχει p ώστε το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty}x^p dx$ να συγκλίνει;

3.34. Να αποδείξετε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{a-1}\log x}{1+x}dx \text{ συγκλίνει αν } 0<a<1$$

3.35. Να αποδείξετε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos ax}{x^p}dx$ συγκλίνει αν $1<p<3$. Συγκλίνει απόλυτα για αυτές τις τιμές του p;

3.36. Να αποδείξετε ότι:

α) $\Gamma(x)=\int_0^1\left(\log\frac{1}{x}\right)^{x-1}dx$

β) $\Gamma(x)=2\int_0^{+\infty}x^{2x-1}e^{-x^2}dx$

γ) $\int_0^{+\infty}x^{\nu-1}e^{-ax}dx=a^{-\nu}\Gamma(\nu)$

δ) $\int_0^1 \left(\frac{\log\frac{1}{x}}{x}\right)^{1/2} dx = \sqrt{2\pi}$

ε) $\int_0^1 \left(\frac{x}{\log\frac{1}{x}}\right)^{1/2} dx = \sqrt{\frac{2\pi}{3}}$

στ) $\frac{1\cdot 3\cdots(2\nu-1)}{2\cdot 4\cdots(2\nu)} = \frac{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+1)}$

3.9. ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 3

Σωστό ή λάθος;

) Αν $p>0$ τότε $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=+\infty$

) Αν $p>0$ τότε $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}<+\infty$

) Αν f συνεχής στο $[0,+\infty)$ και $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$, τότε $\int_0^{+\infty} f(x)dx<+\infty$

) Αν f' συνεχής στο $[0,+\infty)$ και $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$, τότε $\int_0^{+\infty} f'(x)dx=-f(0)$

) $\int_0^{\pi}\frac{tgx}{\cos x}dx=\left[\frac{1}{\cos x}\right]_0^{\pi}=-2$

) $\int_{-1}^1\frac{dx}{x^2}=\left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^1=-2$

) $\int_1^e\frac{dx}{x\sqrt[3]{\log x}}=\left[\frac{3}{2}\sqrt[3]{\log x}\right]_1^e=\frac{3}{2}$

) Αν $\int_0^{+\infty} f(x)dx\leq+\infty$ και $\varphi:[\alpha,+\infty)\to\mathbb{R}$ είναι φραγμένη τότε $\int_0^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx<+\infty$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

3.37. Να αποδείξετε ότι: $\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{\nu}dx=\nu!$

3.38. Να αποδείξετε ότι $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}x^{\nu}dx<+\infty$ αν $\nu\geq 0$. Να αποδείξετε επίσης ότι αν $\nu=2m+1$, $m\in\mathbb{N}$ τότε $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}x^{\nu}dx=\frac{1}{2}m!$

3.39. Να ορίσετε τις σταθερές A και B έτσι, ώστε η συνάρτηση $f(x)=x(x^2+1)^{1/2}-Ax^2-B$ να είναι ολοκληρώσιμη στο $(0,\infty)$.

3.40. Αν $s>0$, να αποδείξετε ότι: $\int_0^1 x^{s-1}\log x\,dx=-\frac{1}{s^2}$

3.41. Να αποδείξετε ότι το ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx$ συγκλίνει και είναι ίσο με το $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$.

3.42. Να βρεθεί το εμβαδό της επιφάνειας που προκύπτει από περιστροφή της καμπύλης $y=e^{-x}$, $x\geq 0$ γύρω από τον άξονα Ox.

3.43. Για ποιές τιμές του p τα παρακάτω ολοκληρώματα

α) $\int_0^{+\infty}\cos(x^p)dx$ β) $\int_1^2\frac{dx}{x(\log x)^p}$

γ) $\int_0^1\left(\log\frac{1}{x}\right)^p dx$

συγκλίνουν;

3.44. Να αποδείξετε ότι το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{+\infty} x^p\sin(x^q)dx,\ p\neq 0$$

συγκλίνει απόλυτα, αν $-1<\frac{p+1}{q}<0$ και υπό συνθήκη αν $0\leq\frac{p+1}{q}<1$

Να αποδείξετε ότι το ολοκλήρωμα

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p(\log x)^q}$$

συγκλίνει αν $p>1$ και $q<1$.

Να αποδείξετε ότι το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{+\infty} x^{-p}(1+x)^{-q}dx$$

συγκλίνει αν $p<1$ και $p+q>1$

Για ποιές τιμές του α τα ολοκληρώματα

α) $\int_0^{+\infty} x^{\alpha}\cos(x^4)dx$ και β) $\int_1^{+\infty}\frac{x^{\alpha}}{1+x^{\alpha}}dx$

συγκλίνουν;

Να βρήτε τις τιμές των p και q για τις οποίες το ολοκλήρωμα

$\int_0^1 x^p\left(\log\frac{1}{x}\right)^q dx$ συγκλίνει.

Να αποδείξετε ότι: $\int_0^{+\infty}\log\left(x+\frac{1}{x}\right)\frac{dx}{1+x^2}=\pi\log 2$.

Να αποδείξετε ότι: $\int_0^{\infty}\varphi(x)dx=\int_0^1\left\{\varphi(x)+\frac{1}{x^2}\varphi\left(\frac{1}{x}\right)\right\}dx$

Να αποδείξετε ότι: $\int_0^1\sqrt{1-x^2}\log\left|1-\frac{1}{x^2}\right|dx=\frac{\pi}{2}$

Έστω

$$f(\alpha)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{ds}{(1+|s|)(1+|s-\alpha|)}$$

Να βρεθεί το $f(0)$ και να αποδείξετε ότι $f(\alpha)\leq f(0)$, $\forall\alpha\in\mathbb{R}$.

3.53. Αν $\beta>\alpha>0$ τότε να αποδείξετε ότι: $\int_\alpha^\beta\frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}}=\pi$. Από αυτό (ή διαφορετικά) να συμπεράνετε ότι:

$$\int_\alpha^\beta\frac{d\theta}{\sqrt{(e^\theta-e^\alpha)(e^\beta-e^\theta)}}=\pi e^{-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}\quad,\ \alpha<\beta$$

μετασχηματισμοί Laplace 4

§ 4.1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο Κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε τον Μετασχηματισμό του .aplace, ο οποίος μετασχηματίζει μια συνάρτηση f μεταβλητής : σε μια άλλη συνάρτηση F, μεταβλητής s. Ο Μετασχηματισμός του Laplace είναι πολύ σημαντικός, τόσο από καθαρά Μαθημα-:ική σκοπιά όσο και από εφαρμοσμένη, κυρίως στην επίλυση :ροβλημάτων αρχικών τιμών για διαφορικές εξισώσεις. Θα δώ-σουμε τον Ορισμό και συνθήκες κάτω από τις οποίες υπάρχει ο Μετασχηματισμός του Laplace και θα μελετήσουμε τις βασικό-:ερες ιδιότητές του. Θα τελειώσουμε αυτό το Κεφάλαιο με τον ιντίστροφο Μετασχηματισμό του Laplace.

4.2. ΟΡΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΥΠΑΡΞΗ ΤΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ LAPLACE

Ορισμός 4.1. Έστω $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ μια τοπικά ολοκληρώσι-η συνάρτηση. Τότε ο Μετασχηματισμός Laplace της f ορίζεται α είναι η συνάρτηση

$$F(s)=\int_0^{+\infty} e^{-st}f(t)dt \qquad (1)$$

F ορίζεται για όλα τα s για τα οποία το γενικευμένο ολο-

κλήρωμα συγκλίνει. Θα συμβολίζεται επίσης και με $\mathfrak{L}\{f(t)\}$

Για να υπάρχει το γενικευμένο ολοκλήρωμα (1) -το οποίο είναι γενικευμένο α' είδους- πρέπει να βάλουμε κάποιους περιορισμούς για την συνάρτηση f. Πρώτα όμως ας βρούμε με την βοήθεια του Ορισμού, τους Μετασχηματισμούς Laplace μερικών απλών συναρτήσεων.

Παράδειγμα 4.1.

Έστω $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(t)=1$. Τότε έχουμε:

$$\mathfrak{L}\{1\}=\int_0^{+\infty} e^{-st}\cdot 1dt=\lim_{a\to+\infty}\int_0^a e^{-st}dt$$

$$=\lim_{a\to+\infty}\left[\frac{1}{s}-\frac{e^{-as}}{s}\right]=\frac{1}{s},\ s>0$$

Έτσι έχουμε:

$$\boxed{\mathfrak{L}\{1\}=\frac{1}{s},\ s>0}$$

Παράδειγμα 4.2.

Θεωρούμε την συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(t)=t$. Τότε

$$\mathfrak{L}\{t\}=\int_0^{+\infty} e^{-st}\cdot tdt=\lim_{a\to+\infty}\int_0^a e^{-st}\cdot tdt$$

$$=\lim_{a\to+\infty}\left[-\frac{e^{-st}}{s^2}(st+1)\right]_0^a$$

$$=\lim_{a\to+\infty}\left[\frac{1}{s^2}-\frac{e^{-as}}{s^2}(as+1)\right]=\frac{1}{s^2},\ s>0$$

Άρα

$$\boxed{\mathfrak{L}\{t\}=\frac{1}{s^2},\ s>0}$$

Παράδειγμα 4.3.

Έστω $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(t)=e^t$. Τότε:

$$\mathcal{L}\{e^t\}=\int_0^{+\infty} e^{-st}\cdot e^t dt=\lim_{a\to+\infty}\int_0^a e^{-(s-1)t}dt$$

$$=\lim_{a\to+\infty}\left[\frac{e^{(1-s)t}}{1-s}\right]_0^a$$

$$=\lim_{a\to+\infty}\left[\frac{e^{(1-s)a}}{1-s}-\frac{1}{1-s}\right]=\frac{1}{s-1}$$

$$\boxed{\mathcal{L}\{e^t\}=\frac{1}{s-1}\,,\ s>1}$$

άδειγμα 4.4.

Για την συνάρτηση $f(t)=\sin t,\ t\geqslant 0$ έχουμε:

$$\mathcal{L}\{\sin t\}=\int_0^{+\infty} e^{-st}\cdot \sin t\, dt=\lim_{a\to+\infty}\int_0^a e^{-st}\sin t\, dt$$

$$=\lim_{a\to+\infty}\left[-\frac{e^{-st}}{s^2+1}(s\cdot\sin t+\cos t)\right]_0^a \quad \text{(μορφή Γ της §1.3)}$$

$$=\lim_{a\to+\infty}\left[\frac{1}{s^2+1}-\frac{e^{-as}}{s^2+1}(s\cdot\sin a+\cos a)\right]=\frac{1}{s^2+1}$$

ιδή

$$\boxed{\mathcal{L}\{\sin t\}=\frac{1}{s^2+1}\,,\ s>0}$$

άδειγμα 4.5*.

Έστω $f(t)=\cos t,\ t\geqslant 0$. Τότε:

$$\mathcal{L}\{\cos t\}=\int_0^{+\infty} e^{-st}\cdot \cos t\, dt=\lim_{a\to+\infty}\int_0^a e^{-st}\cdot\cos t\, dt$$

$$=\lim_{a\to+\infty}\left[\frac{e^{-st}}{s^2+1}(-s\cos t+\sin t)\right]_0^a$$

$$=\lim_{a\to+\infty}\left[\frac{e^{-as}}{s^2+1}(-s\cos a+\sin a)+\frac{s}{s^2+1}\right]=\frac{s}{s^2+1}$$

* Βλέπε και άσκηση 3.3γ) με $\alpha=s$, $\beta=1$

Δηλαδή

$$\boxed{\mathcal{L}\{\cos t\}=\frac{s}{s^2+1}\,,\ s>0}$$

Σε όλα τα προηγούμενα παραδείγματα βρήκαμε τον Μετασχηματισμό Laplace κάποιων συναρτήσεων με την βοήθεια του ορισμού. Δεν είναι όμως πάντα εύκολο για μια δοσμένη συνάρτηση να ελέγξουμε αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} e^{-st}f(t)dt$ συγκλίνει για κάποιες τιμές του s. Γι' αυτό θα ορίσουμε μια κλάση συναρτήσεων για τις οποίες πάντα το γενικευμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει.

Ορισμός 4.2. Μια συνάρτηση f θα λέγεται κατά τμήματα συνεχής σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$, αν αυτό το διάστημα μπορεί να διαιρεθεί σε έναν πεπερασμένο αριθμό υποδιαστημάτων τέτοιων ώστε:

i) η f είναι συνεχής σε κάθε ένα από αυτά τα υποδιαστήματα και

ii) η f έχει πεπερασμένα πλευρικά όρια στα άκρα κάθε τέτοιου υποδιαστήματος.

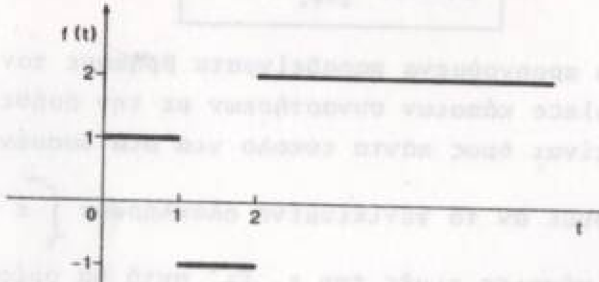
Έτσι σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό μια συνάρτηση f θα λέγεται κατά τμήματα συνεχής σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$ αν υπάρχει μια διαμέριση $P=\{x_0,x_1,\dots,x_\nu\}$ του $[\alpha,\beta]$ με $\alpha=x_0<x_1<\dots<x_\nu=\beta$ τέτοια ώστε η f να είναι συνεχής στο $(x_k,\ x_{k+1})$, $\forall\ k=0,1,\dots,\nu-1$ και να υπάρχουν τα πλευρικά όρια $\lim\limits_{t\to x_k^+} f(t)$ και $\lim\limits_{t\to x_{k+1}^-} f(t)$.

Παράδειγμα 4.6.

Η συνάρτηση

$$f(t)=\begin{cases}1, & 0<t<1\\ -1, & 1<t<2\\ 2, & t>2\end{cases}$$

αι κατά τμήματα συνεχής, σε κάθε πεπερασμένο διάστημα [0,α] για κά- α > 0. Βλέπε σχήμα 4.1.



Σχήμα 4.1.

σημεία 1 και 2 έχουμε αντίστοιχα:

$$\lim_{t\to 1^-} f(t)=1,\quad \lim_{t\to 1^+} f(t)=-1$$

$$\lim_{t\to 2^-} f(t)=-1,\quad \lim_{t\to 2^+} f(t)=2$$

ατήρηση 4.1.

Αν η f είναι συνεχής στο [α,β], τότε αυτή είναι αναγκαστικά κατά ατα συνεχής σ'αυτό το διάστημα. Επίσης αν η f είναι κατά τμήματα ής στο [α,β], τότε αυτή είναι ολοκληρώσιμη στο [α,β], αφού τα ση- ασυνέχειάς της είναι πεπερασμένα στο πλήθος (Θεώρημα 2.8 και Πό-).

Ορισμός 4.3. Μια συνάρτηση f θα λέγεται εκθετικής τά- όταν $t \to +\infty$, αν υπάρχουν σταθερές M και α τέτοιες ώστε:

$$|f(t)| < Me^{\alpha t},\quad t \geq t_0 \qquad (2)$$

ιθμός α λέγεται τάξη της f.

Οι συναρτήσεις εκθετικής τάξης παίζουν κυρίαρχο ρόλο ς Μετασχηματισμούς Laplace. Γι'αυτό θα ασχοληθούμε για

λίγο με το πως θα εξετάζουμε αν μια συνάρτηση είναι εκθετικής τάξης ή όχι. Προφανώς μια φραγμένη συνάρτηση είναι εκθετικής τάξης. Αρκεί να πάρουμε στον Ορισμό 4.3 α=0.

Μια άλλη κατηγορία συναρτήσεων που είναι εκθετικής τάξης είναι εκείνες για τις οποίες υπάρχει σταθερή α τέτοια ώστε να υπάρχει το όριο:

$$\lim_{t\to+\infty} e^{-\alpha t}|f(t)| = \ell \in \mathbb{R} \qquad (3)$$

Πραγματικά· αν $\ell \neq 0$ τότε για αρκετά μεγάλο t το $e^{-\alpha t}|f(t)|$ μπορεί να προσεγγίσει το ℓ όσο θέλουμε. Για παράδειγμα $|e^{-\alpha t}f(t)| < 2\ell$. Άρα υπάρχει t_0 τέτοιο ώστε $|f(t)| < Me^{\alpha t}$, $t \geq t_0$ με $M=2\ell$. Αν $\ell=0$ τότε παίρνουμε M=1.

Από την άλλη μεριά, αν για κάθε σταθερό c είναι

$$\lim_{t\to+\infty} e^{-ct}|f(t)| = +\infty \qquad (4)$$

τότε η f δεν είναι εκθετικής τάξης. Γιατί αν ήταν θα είχαμε $|f(t)| < Me^{\alpha t}$, $t \geq t_0$ ή $e^{-2\alpha t}|f(t)| < Me^{-\alpha t}$, $t \geq t_0$ που σημαίνει ότι $\lim_{t\to+\infty} e^{-2\alpha t}f(t)=0$. Αυτό όμως αντίκειται στην (4) με $c=2\alpha$.

Παράδειγμα 4.7.

Η συνάρτηση $f(t)=t^{\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}$ είναι εκθετικής τάξης α. Πραγματικά επειδή

$$\lim_{t\to+\infty}(e^{-\alpha t}\cdot t^{\nu}) = \lim_{t\to+\infty}\frac{t^{\nu}}{e^{\alpha t}} = \lim_{t\to+\infty}\frac{\nu!}{\alpha^{\nu}e^{\alpha t}} = 0$$

(διαδοχικές εφαρμογές του κανόνα του L'Hospital) συνεπάγεται ότι η t^{ν} είναι εκθετικής τάξης $\alpha > 0$.

Παράδειγμα 4.8.

Η συνάρτηση $f(t)=e^{t^2}$ δεν είναι εκθετικής τάξης. Πραγματικά επειδή

$$\lim_{t\to+\infty}(e^{-\alpha t}e^{t^2}) = \lim_{t\to+\infty} e^{t(t-\alpha)} = +\infty$$

η f δεν μπορεί να είναι εκθετικής τάξης.

Είμαστε τώρα σε θέση να δώσουμε ένα θεώρημα που αφορά την ύπαρξη του Μετασχηματισμού Laplace.

Θεώρημα 4.1. Έστω $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση με τις ακόλουθες ιδιότητες:

i) η f είναι κατά τμήματα συνεχής σε κάθε κλειστό διάστημα της μορφής $[0,\beta]$, $\beta>0$.

ii) η f είναι εκθετικής τάξης α, δηλ. υπάρχουν σταθερές α και $M>0$ τέτοιες ώστε: $|f(t)|<Me^{\alpha t}$, $t\geq t_0$

Τότε ο Μετασχηματισμός Laplace της f

$$\int_0^{+\infty} e^{-st}f(t)dt$$

υπάρχει για $s>\alpha$.

Απόδειξη

Έχουμε:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\int_0^{+\infty} e^{-st}f(t)dt=\int_0^{t_0} e^{-st}f(t)dt+\int_{t_0}^{+\infty} e^{-st}f(t)dt$$

Από την υπόθεση i) το πρώτο ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους υπάρχει. Επίσης από την ii) έχουμε:

$$\left|\int_{t_0}^{+\infty} e^{-st}f(t)dt\right| \leq \int_{t_0}^{+\infty}|e^{-st}f(t)|dt \leq \int_{t_0}^{+\infty} e^{-st}|f(t)|dt$$

$$<\int_{t_0}^{+\infty} e^{-st}Me^{\alpha t}dt$$

Αλλά το ολοκλήρωμα $\int_{t_0}^{+\infty} Me^{-(s-\alpha)}dt$ υπάρχει για $s>\alpha$ αφού:

$$\int_{t_0}^{+\infty} Me^{-(s-\alpha)}dt=\lim_{k\to+\infty}\int_{t_0}^{k} Me^{-(s-\alpha)}dt=\frac{M}{s-\alpha}e^{-(s-\alpha)t_0},\ s>\alpha$$

Συνεπώς από το Θεώρημα 3.5 το $\int_{t_0}^{+\infty} e^{-st}f(t)dt$ συγκλίνει αν $s>\alpha$. Έτσι το Θεώρημα αποδείχτηκε.■

Παρατήρηση 4.2.

Από την απόδειξη του Θεωρήματος 4.1 βλέπουμε ότι όχι μόνο ο $\mathcal{L}\{f(t)\}$ υπάρχει για $s>\alpha$, αλλά και ο $\mathcal{L}\{|f(t)|\}$.

Παρατήρηση 4.3.

Το Θεώρημα 4.1 δίνει ι κ α ν έ ς σ υ ν θ ή κ ε ς για την ύπαρξη του Μετασχηματισμού Laplace, όχι όμως και α ν α γ κ α ί ε ς. Δηλαδή υπάρχουν συναρτήσεις που δεν ικανοποιούν τις υποθέσεις του Θεωρήματος 4.1 και εν τούτοις ο Μετασχηματισμός Laplace υπάρχει. Ένα κλασικό παράδειγμα αποτελεί η συνάρτηση $f(t)=t^{-1/2}$. Αυτή δεν είναι κατα τμήματα συνεχής σε κάθε πεπερασμένο διάστημα του $[0,+\infty)$, αφού $\lim_{t\to0^+}f(t)=+\infty$. Αλλά η f είναι ολοκληρώσιμη στο $(0,t_0]$ (Παράδειγμα 3.1). Επίσης, επειδή $\lim_{t\to+\infty}f(t)=0$ η f είναι εκθετικής τάξης με $M=1$, $\alpha=0$ στον Ορισμό 4.3. Άρα ο $\mathcal{L}\{t^{-1/2}\}$ υπάρχει, και μάλιστα είναι:

$$\mathcal{L}\{t^{-1/2}\}=\int_0^{+\infty} e^{-st}\cdot t^{-1/2}dt$$

$$=2s^{-1/2}\int_0^{+\infty} e^{-y^2}dy\quad (st=y^2)$$

$$=2\cdot s^{-1/2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\quad \text{(Εφαρμογή 4 της §3.3)}$$

$$=\sqrt{\frac{\pi}{s}},\ s>0$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Έστω $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση κατά τμήματα συνεχής σε κάθε πεπερασμένο διάστημα $[0,\beta]$, $\beta>0$ και εκθετικής τάξης α. Αν $\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)$ τότε:

$$\lim_{s\to+\infty}F(s)=0$$

Απόδειξη

Η f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[0,t_0]$, άρα φραγμένη σ' αυτό το διάστημα. Δηλ.

$$|f(t)|\leqslant M_1,\ 0\leqslant t\leqslant t_0$$

Αφού είναι και εκθετικής τάξης α θα έχουμε:

$$|f(t)|<Me^{\alpha t},\ t\geqslant t_0$$

Διαλέγουμε $M_2=\max\{M_1,M\}$ και $c=\max\{0,\alpha\}$. Τότε:

$$|f(t)|<M_2e^{ct},\ t\geqslant 0$$

Συνεπώς:

$$|F(s)|=|\mathcal{L}\{f(t)\}|=\left|\int_0^{+\infty}e^{-st}f(t)dt\right|$$

$$<M_2\int_0^{+\infty}e^{-(s-c)t}dt=\frac{M_2}{s-c},\ s>c$$

Παίρνοντας τα όρια στην τελευταία σχέση έχουμε το συμπέρασμα.

2. Να αποδείξετε ότι: $\mathcal{L}\{t^\nu\}=\dfrac{\nu!}{s^{\nu+1}}$, $s>0$

Απόδειξη

Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή. Για $\nu=1$ ισχύει, από το Παράδειγμα 4.2. Υποθέτοντας ότι ισχύει για ν, θα έχουμε:

$$\mathcal{L}\{t^{\nu+1}\}=\int_0^{+\infty}e^{-st}t^{\nu+1}dt=\lim_{k\to+\infty}\int_0^k e^{-st}t^{\nu+1}dt$$

$$=\lim_{k\to+\infty}\left[-\frac{e^{-st}\cdot t^{\nu+1}}{s}\Bigg|_0^k+\frac{\nu+1}{s}\int_0^k e^{-st}t^{\nu}dt\right]$$

$$=-\lim_{k\to+\infty}\frac{e^{-ks}k^{\nu+1}}{s}+\frac{\nu+1}{s}\lim_{k\to+\infty}\int_0^k e^{-st}t^{\nu}dt$$

$$=\frac{\nu+1}{s}\cdot\mathcal{L}\{t^\nu\}=\frac{\nu+1}{s}\cdot\frac{\nu!}{s^{\nu+1}}=\frac{(\nu+1)!}{s^{\nu+2}}$$

δηλαδή ισχύει για κάθε $\nu\in\mathbb{N}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

4.1. Αν οι συναρτήσεις f_1 και f_2 είναι εκθετικών τάξεων α_1 και α_2 αντίστοιχα, τότε να αποδείξετε ότι η $f_1\cdot f_2$ είναι εκθετικής τάξης $\alpha_1+\alpha_2$ και η f_1+f_2 είναι εκθετικής τάξης $\alpha=\max\{\alpha_1,\alpha_2\}$.

4.2. α) Να αποδείξετε ότι η $f(t)=t^x$ είναι εκθετικής τάξης $\forall x\in\mathbb{R}$

β) Αν η f είναι εκθετικής τάξης α τότε να αποδείξετε ότι η

$$g(t)=\int_0^t f(u)du,\ t\geqslant 0$$ είναι εκθετικής τάξης.

4.3. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις μπορούν να μετασχηματιστούν κατά Laplace:

α) $f(t)=\sin kt$, $k\in\mathbb{R}$ β) $f(t)=\cos kt$, $k\in\mathbb{R}$

γ) $f(t)=\sinh kt$, $k\in\mathbb{R}$ δ) $f(t)=\dfrac{\sin kt}{t}$, $k\in\mathbb{R}$

4.4. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις μπορούν να μετασχηματιστούν κατά Laplace:

α) $f(t)=\cos t^2$ β) $f(t)=e^{t^2-t}$

γ) $f(t)=e^{kt}\sin\beta t$, $k,\beta\in\mathbb{R}$ δ) $f(t)=\dfrac{1-e^{-t}}{t}$

4.5. Να βρεθεί ο $\mathcal{L}\{f(t)\}$ αν:

α) $f(t)=c$, c σταθερή β) $f(t)=\begin{cases} \sin 2t, & 0<t<\pi \\ 0, & t>\pi \end{cases}$

4.6. Να αποδείξετε ότι: $\mathcal{L}\{t^{1/2}\}=\frac{1}{2s}\sqrt{\frac{\pi}{s}}, s>0$

§ 4.3. ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ LAPLACE

Τα θεωρήματα που ακολουθούν περιγράφουν τις πιο βασικές ιδιότητες του Μετασχηματισμού Laplace.

Θεώρημα 4.2 (Γραμμικότητα). Έστω $f_1, f_2:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ δυο συναρτήσεις για τις οποίες υποθέτουμε ότι υπάρχουν οι $\mathcal{L}\{f_1(t)\}$ και $\mathcal{L}\{f_2(t)\}$. Τότε για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς c_1 και c_2 ισχύει:

$$\mathcal{L}\{c_1f_1(t)+c_2f_2(t)\}=c_1\,\mathcal{L}\{f_1(t)\}+c_2\,\mathcal{L}\{f_2(t)\}$$

Απόδειξη

Είναι

$$\mathcal{L}\{c_1f_1(t)+c_2f_2(t)\}=\int_0^{+\infty}e^{-st}[c_1f_1(t)+c_2f_2(t)]dt$$

$$=c_1\int_0^{+\infty}e^{-st}f_1(t)dt+c_2\int_0^{+\infty}e^{-st}f_2(t)dt$$

$$=c_1\,\mathcal{L}\{f_1(t)\}+c_2\,\mathcal{L}\{f_2(t)\}$$

από το Θεώρημα 3.1.

Παράδειγμα 4.9.

Είναι $\mathcal{L}\{t^5+2e^t-3\sin t+\cos t\}=\mathcal{L}\{t^5\}+2\,\mathcal{L}\{e^t\}-3\,\mathcal{L}\{\sin t\}+\mathcal{L}\{\cos t\}=\frac{5!}{s^6}+2\cdot\frac{1}{s-1}-3\cdot\frac{1}{s^2+1}+\frac{s}{s^2+1}$

Θεώρημα 4.3 (Παράλληλη μετατόπιση). Αν $\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)$, $s>\alpha_0$, τότε για οποιαδήποτε σταθερή $\alpha\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$\mathcal{L}\{e^{\alpha t}f(t)\}=F(s-\alpha),\ s>\alpha+\alpha_0$$

Απόδειξη

Έχουμε:

$$\mathcal{L}\left\{e^{\alpha t}f(t)\right\}=\int_0^{+\infty}e^{-st}e^{\alpha t}f(t)dt=\int_0^{+\infty}e^{-(s-\alpha)t}f(t)=F(s-\alpha)$$

αν $s-\alpha>\alpha_0$ ή $s>\alpha+\alpha_0$. ■

Παράδειγμα 4.10.

Είναι $\mathcal{L}\{e^{\alpha t}\}=\frac{1}{s-\alpha}$, $s>\alpha$. Πραγματικά από το Παράδειγμα 4.1 έχουμε ότι $\mathcal{L}\{1\}=\frac{1}{s}$, $s>0$. Τότε από το Θεώρημα 4.3 με $f(t)=1$ έχουμε:

$$\mathcal{L}\{e^{\alpha t}\cdot 1\}=\frac{1}{s-\alpha},\ s>\alpha$$

Παράδειγμα 4.11.

Θα βρούμε το $\mathcal{L}\{\sinh t\}$. Έχουμε:

$$\mathcal{L}\{\sinh t\}=\mathcal{L}\left\{\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right\}=\frac{1}{2}\,\mathcal{L}\{e^t\}-\frac{1}{2}\,\mathcal{L}\{e^{-t}\}\quad(\text{Θεώρημα } 4.2)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s-1}-\frac{1}{2}\,\frac{1}{s+1}=\frac{1}{s^2-1},\ s>1$$

Θεώρημα 4.4. Έστω $\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)$, $s>\alpha_0$ και g μια συνάρτηση που ορίζεται ως εξής:

$$g(t)=\begin{cases} 0, & 0<t<\alpha \\ f(t-\alpha), & t>\alpha \end{cases}$$

Τότε:

$$\mathcal{L}\{g(t)\}=e^{-\alpha s}F(s),\ s>\alpha_0$$

Απόδειξη

Έχουμε:

$$\mathfrak{L}\{g(t)\}=\int_0^{+\infty}e^{-st}g(t)dt=\int_0^{\alpha}e^{-st}0dt+\int_{\alpha}^{+\infty}e^{-st}f(t-\alpha)dt$$

$$=\int_{\alpha}^{+\infty}e^{-st}f(t-\alpha)dt$$

$$=\int_0^{+\infty}e^{-s(u+\alpha)}f(u)du \quad (\text{θέτουμε } \ t-\alpha=u)$$

$$=e^{-s\alpha}\int_0^{+\infty}e^{-su}f(u)du$$

$$=e^{-s\alpha}F(s),\ s>\alpha_0 \ \blacksquare$$

Παράδειγμα 4.12.

Θα υπολογίσουμε τον $\mathfrak{L}\{g(t)\}$ αν

$$g(t)=\begin{cases}0, & 0<t<\frac{\pi}{2}\\ \sin t, & t>\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

Επειδή $\sin t=\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right)$ η g γράφεται:

$$g(t)=\begin{cases}0, & 0<t<\frac{\pi}{2}\\ \cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right), & t>\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

Έτσι από το θεώρημα 4.4 με $f(t)=\cos t$ έχουμε:

$$\mathfrak{L}\{g(t)\}=e^{(-\pi/2)s}F(s)=e^{(-\pi/2)s}\,\mathfrak{L}\{\cos t\}=\frac{se^{(-\pi/2)s}}{s^2+1},$$

αφού από το Παράδειγμα 4.5 είναι $\mathfrak{L}\{\cos t\}=\frac{s}{s^2+1}$, $s>0$.

Θεώρημα 4.5. Αν $\mathfrak{L}\{f(t)\}=F(s)$, $s>\alpha_0$ τότε για κάθε σταθερό αριθμό $\alpha\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$\mathfrak{L}\{f(\alpha t)\}=\frac{1}{\alpha}F\left(\frac{s}{\alpha}\right),\ s>\alpha\alpha_0$$

Απόδειξη

Έχουμε:

$$\mathfrak{L}\{f(\alpha t)\}=\int_0^{+\infty}e^{-st}f(\alpha t)dt$$

$$=\frac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty}e^{-s(\xi/\alpha)}f(\xi)d\xi \quad (\text{θέτουμε } \ \xi=\alpha t)$$

$$=\frac{1}{\alpha}F\left(\frac{s}{\alpha}\right),\ \frac{s}{\alpha}>\alpha_0 \ \blacksquare$$

Παράδειγμα 4.13.

Αφού $\mathfrak{L}\{\sin t\}=\frac{1}{s^2+1}$, από το Παράδειγμα 4.4, τότε από το θεώρημα 4.5 θα έχουμε:

$$\mathfrak{L}\{\sin \alpha t\}=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\left(\frac{s}{\alpha}\right)^2+1}=\frac{\alpha}{s^2+\alpha^2},\ s>0$$

Παράδειγμα 4.14.

Ας βρούμε τώρα την συνάρτηση $\mathfrak{L}\{e^{\alpha t}\sinh\beta t\}$. Επειδή από το Παράδειγμα 4.11 είναι $\mathfrak{L}\{\sinh t\}=\frac{1}{s^2-1}$, $s>1$ τότε από το θεώρημα 4.5 θα έχουμε:

$$\mathfrak{L}\{\sinh\beta t\}=\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{\left(\frac{s}{\beta}\right)-1}=\frac{\beta}{s^2-\beta^2},\ s>\beta$$

Τότε από το θεώρημα 4.3 θα έχουμε:

$$\mathfrak{L}\{e^{\alpha t}\sinh\beta t\}=\frac{\beta}{(s-\alpha)^2-\beta^2},\ s>\alpha+\beta$$

Θεώρημα 4.6 (Μετασχηματισμός της παραγώγου). Έστω $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση και εκθετικής τάξης α. Έστω ακόμα ότι η f' είναι κατά τμήματα συνεχής σε κάθε πεπερασμένο διάστημα $[0,\beta]$, $\beta>0$. Τότε ο $\mathfrak{L}\{f'(t)\}$ υπάρχει για

$s > \alpha$ και

$$\mathcal{L}\{f'(t)\}=s\,\mathcal{L}\{f(t)\}-f(0)$$

Απόδειξη

Επειδή η f' είναι κατά τμήματα συνεχής στο $[0,\beta]$, από την Παρατήρηση 4.1 θα είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,\beta]$. Συνεπώς εφαρμόζοντας παραγοντική ολοκλήρωση θα έχουμε:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\}=\int_0^{+\infty} e^{-st}f'(t)dt=\lim_{k\to+\infty}\int_0^k e^{-st}f'(t)dt$$

$$=\lim_{k\to+\infty}\left\{e^{-sk}f(k)-f(0)+s\int_0^k e^{-st}f(t)dt\right\}$$

$$=\lim_{k\to+\infty}\{e^{-sk}f(k)\}-f(0)+s\int_0^{+\infty} e^{-st}f(t)dt$$

$$=-f(0)+s\,\mathcal{L}\{f(t)\}$$

γιατί $\lim_{k\to+\infty} e^{-sk}f(k)=0$, αφού η f είναι εκθετικής τάξης α. Έτσι το θεώρημα αποδείχτηκε. ∎

Παράδειγμα 4.15.

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω θεώρημα ας βρούμε το $\mathcal{L}\{e^{\alpha t}\}$. Τότε θα έχουμε: $f(t)=e^{\alpha t}$, $f'(t)=\alpha e^{\alpha t}$ και $f(0)=1$. Συνεπώς το Θεώρημα 4.6 δίνει:

$$\mathcal{L}\{\alpha e^{\alpha t}\}=s\,\mathcal{L}\{e^{\alpha t}\}-1$$

ή

$$\alpha\,\mathcal{L}\{e^{\alpha t}\}=s\,\mathcal{L}\{e^{\alpha t}\}-1$$

Άρα:
$$\mathcal{L}\{e^{\alpha t}\}=\frac{1}{s-\alpha},\quad s>\alpha$$

Παρατήρηση 4.4.

Η συνθήκη της συνέχειας της f στο Θεώρημα 4.6 μπορεί να εξασθενήσει. Για παράδειγμα ας υποθέσουμε ότι η f έχει το σημείο t_1 σημείο

ασυνέχειας α' είδους, δηλ. τα $\lim_{t\to t_1^-} f(t)=f(t_1^-)$ και $\lim_{t\to t_1^+} f(t)=f(t_1^+)$ υπάρχουν. Τότε αν η f είναι εκθετικής τάξης α και η f' κατά τμήματα συνεχής σε κάθε πεπερασμένο διάστημα $[0,\beta]$ θα έχουμε:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\}=\int_0^{+\infty} e^{-st}f'(t)dt=\int_0^{t_1} e^{-st}f'(t)dt+\int_{t_1}^{+\infty} e^{-st}f'(t)dt$$

$$=\left[e^{-st}f(t)\right]_0^{t_1}+s\int_0^{t_1} e^{-st}f(t)dt$$

$$+\left[e^{-st}f(t)\right]_{t_1}^{+\infty}+s\int_{t_1}^{+\infty} e^{-st}f(t)dt$$

$$=s\int_0^{+\infty} e^{-st}f(t)dt+e^{-st_1}f(t_1^-)-f(0)+0-e^{-st_1}f(t_1^+)$$

$$=s\,\mathcal{L}\{f(t)\}-f(0)-e^{-st_1}\left[f(t_1^+)-f(t_1^-)\right]$$

Έτσι βλέπουμε ότι *εξασθενώντας την υπόθεση της συνέχειας της f, προστίθεται και άλλος όρος στο* $\mathcal{L}\{f'(t)\}$. Προφανώς αν η f έχει περισσότερα σημεία ασυνέχειας (βέβαια πεπερασμένα το πλήθος) τότε προστίθενται όροι στον $\mathcal{L}\{f'(t)\}$ ανάλογοι με αυτόν που προστέθηκε για το t_1.

Παράδειγμα 4.16.

Ας θεωρήσουμε την συνάρτηση

$$f(t)=\begin{cases} 2t, & 0\leqslant t\leqslant 1\\ t, & t>1\end{cases}$$

Τότε

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\int_0^{+\infty} e^{-st}f(t)dt=\int_0^{1} e^{-st}2tdt+\int_1^{+\infty} e^{-st}tdt$$

$$=\frac{2}{s^2}-\frac{e^{-s}}{s}-\frac{e^{-s}}{s^2}$$

Επίσης επειδή

$$f'(t)=\begin{cases} 2, & 0\leqslant t<1\end{cases}$$

εφαρμόζοντας τον ορισμό, έχουμε:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\}=\int_0^{\infty} e^{-st}f'(t)dt=\int_0^1 e^{-st}\cdot 2dt+\int_1^{\infty} e^{-st}\cdot 1dt=\frac{2}{s}-\frac{e^{-s}}{s}$$

Παρατηρούμε τώρα τα εξής:

Το θεώρημα 4.6 δεν εφαρμόζεται αφού η f δεν είναι συνεχής στο 1.
πό την Παρατήρηση 4.4 όμως έχουμε:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\}=s\,\mathcal{L}\{f(t)\}-f(0)-e^{-st_1}[\lim_{t\to 1+} f(t)-\lim_{t\to 1-} f(t)]$$

$$=s\left(\frac{2}{s^2}-\frac{e^{-s}}{s}-\frac{e^{-s}}{s^2}\right)-e^{-s}[1-2]$$

$$=\frac{2}{s}-\frac{e^{-s}}{s}$$

ου συμπίπτει με το αποτέλεσμα που βρήκαμε προηγούμενα.

Το θεώρημα 4.6 γενικεύεται εύκολα ως εξής:

Θεώρημα 4.7. Έστω $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση με συ-
εχή παράγωγο ν-1 τάξης στο $[0,+\infty)$ (αυτό συνεπάγεται ότι
ι $f^{(\nu-2)},\dots,f',f$ είναι συνεχείς). Υποθέτουμε ακόμα ότι
ι $f,f',\dots,f^{(\nu-1)}$ είναι εκθετικής τάξης α και η $f^{(\nu)}$ είναι
ατά τμήματα συνεχής σε κάθε πεπερασμένο διάστημα $[0,\beta]$, $\beta>0$.
ότε ο $\mathcal{L}\{f^{(\nu)}(t)\}$ υπάρχει για $s>\alpha$ και

$$\mathcal{L}\{f^{(\nu)}(t)\}=s^{\nu}\mathcal{L}\{f(t)\}-s^{\nu-1}f(0)-s^{\nu-2}f'(0)-\cdots-f^{(\nu-1)}(0)$$

πόδειξη

Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή. Για ν=1 είναι το θεώρημα 4.6. Υ-
οθέτοντας ότι ισχύει για ν θα έχουμε:

$$\mathcal{L}\{f^{(\nu+1)}(t)\}=s\,\mathcal{L}\{f^{(\nu)}(t)\}-f^{(\nu)}(0)$$

$$=s\left[s^{\nu}\mathcal{L}\{f(t)\}-s^{\nu-1}f(0)-\cdots-f^{(\nu-1)}(0)\right]-f^{(\nu)}(0)$$

$$=s^{\nu+1}\mathcal{L}\{f(t)\}-s^{\nu}f(0)-\cdots-f^{(\nu)}(0)$$

ηλαδή ισχύει και για ν+1. Άρα ισχύει $\forall\nu\in\mathbb{N}$. ■

Παράδειγμα 4.17.

Ας θεωρήσουμε την συνάρτηση $f(t)=\sin t$. Τότε $f'(t)=\cos t$, $f''(t)=-\sin t$ και $f(0)=0$, $f'(0)=1$. Έτσι από το θεώρημα 4.7 για ν=2 έχουμε:

$$\mathcal{L}\{-\sin t\}=s^2\mathcal{L}\{\sin t\}-1 \quad \text{ή} \quad \mathcal{L}\{\sin t\}=\frac{1}{s^2+1},\ s>0$$

Θεώρημα 4.8. Έστω $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση, η οποία είναι εκθετικής τάξης α. Αν $\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)$, $s>\alpha$ τότε:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)du\right\}=\frac{F(s)}{s},\ s>\alpha$$

Απόδειξη

Θέτουμε $g(t)=\int_0^t f(u)du$, $t\geq 0$. Αφού η f είναι συνεχής η g είναι παραγωγίσιμη και $g'(t)=f(t)$. Σύμφωνα με το θεώρημα 4.6 αφού $g(0)=0$ θα έχουμε:

$$F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}=\mathcal{L}\{g'(t)\}=s\,\mathcal{L}\{g(t)\}-g(0)=s\,\mathcal{L}\{g(t)\}$$

ή $$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)du\right\}=\frac{F(s)}{s}$$ ■

Παράδειγμα 4.18.

Ας θεωρήσουμε την συνάρτηση $f(t)=\sinh t$, $t\geq 0$. Αυτή είναι συνεχής και εκθετικής τάξης 1. Τότε θα έχουμε:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \sinh u\,du\right\}=\frac{1}{s}\,\mathcal{L}\{\sinh t\}$$

ή

$$\mathcal{L}\{\cosh t-1\}=\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s^2-1}$$

αφού $\mathcal{L}\{\sinh t\}=\frac{1}{s^2-1}$, $s>1$ από το Παράδειγμα 4.11.

Συνεπώς:

$$\mathcal{L}\{\cosh t\}=\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s^2-1}+\mathcal{L}\{1\}=\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s^2-1}+\frac{1}{s}=\frac{s}{s^2-1},\ s>1$$

Τα επόμενα θεωρήματα που αφορούν τους Μετασχηματισμούς aplace συναρτήσεων πολλαπλασιασμένων με δυνάμεις του t ή υναρτήσεων διαιρεμένων με t, τα αναφέρουμε χωρίς απόδειξη.

Θεώρημα 4.9. Έστω $f:[0,+\infty) \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση κατά μήματα συνεχής σε κάθε πεπερασμένο διάστημα $[0,\beta]$ $\beta>0$ και κθετικής τάξης α. Αν $\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)$, $s>\alpha$ τότε:

$$\mathcal{L}\{t^{\nu}f(t)\}=(-1)^{\nu}\frac{d^{\nu}}{ds^{\nu}}F(s)$$

αράδειγμα 4.19.

Ας υπολογίσουμε τον Μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης $f(t)=$ $^2\sin\alpha t$, $t \geqslant 0$.

Από το Παράδειγμα 4.13 έχουμε $\mathcal{L}\{\sin\alpha t\}=\frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}$. Άρα από το Θεώ-ημα 4.9 είναι:

$$\mathcal{L}\{t^2\sin\alpha t\}=(-1)^2\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}\right)=\frac{6\alpha s^2-2\alpha^3}{(s^2+\alpha^2)^3}$$

Θεώρημα 4.10. Έστω $f:[0,+\infty) \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση κατά μήματα συνεχής σε κάθε πεπερασμένο διάστημα $[0,\beta]$ $\beta>0$ και κθετικής τάξης α. Αν $\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)$, $s>\alpha$ και το $\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t}$ πάρχει, τότε:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}=\int_s^{+\infty}F(u)du$$

αράδειγμα 4.20.

Έστω $f(t)=e^{-\beta t}-e^{-\alpha t}$. Τότε: $\mathcal{L}\{f(t)\}=\frac{1}{s+\beta}-\frac{1}{s+\alpha}$, από το Παράδει-γμα 4.10. Επίσης

$$\lim_{t\to 0}\frac{e^{-\beta t}-e^{-\alpha t}}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{-\beta e^{-\beta t}+\alpha e^{-\alpha t}}{1}=\alpha-\beta$$

ε εφαρμογή του κανόνα του L'Hospital. Άρα από το Θεώρημα 4.10 θα έ-ουμε:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{e^{-\beta t}-e^{-\alpha t}}{t}\right\}=\int_s^{+\infty}\left(\frac{1}{u+\beta}-\frac{1}{u+\alpha}\right)du$$

$$=\lim_{k\to+\infty}\int_s^{k}\left(\frac{1}{u+\beta}-\frac{1}{u+\alpha}\right)du$$

$$=\lim_{k\to+\infty}\left[\log\frac{k+\beta}{k+\alpha}-\log\frac{s+\beta}{s+\alpha}\right]$$

$$=-\log\frac{s+\beta}{s+\alpha}=\log\frac{s+\alpha}{s+\beta}$$

Μια πολύ σημαντική κατηγορία συναρτήσεων είναι οι περιοδικές συναρτήσεις. Για αυτές τις συναρτήσεις ο Μετασχηματισμός Laplace καθορίζεται από τις τιμές της f σε διάστημα μιας περιόδου, όπως δείχνει το επόμενο

Θεώρημα 4.11. Έστω $f:[0,+\infty) \to \mathbb{R}$ μια περιοδική συνάρτηση με περίοδο $T>0$. Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[0,T]$, τότε:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\frac{\int_0^T e^{-st}f(t)dt}{1-e^{-sT}}, \quad s>0$$

Απόδειξη

Έχουμε:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\int_0^{+\infty}e^{-st}f(t)dt$$

$$=\int_0^T e^{-st}f(t)dt+\int_T^{2T}e^{-st}f(t)dt+\cdots+\int_{(\nu-1)T}^{\nu T}e^{-st}f(t)dt+\cdots$$

Στο δεύτερο ολοκλήρωμα θέτουμε $t=u+T$ στο τρίτο $t=u+2T$ κ.τ.λ. στο τελευταίο $t=u+(\nu-1)T$. Τότε λαμβάνοντας υπόψη ότι: $f(u+T)=f(u+2T)=\cdots=f(u+\nu T)=f(u)$ έχουμε:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\int_0^T e^{-st}f(t)dt+\int_0^T e^{-s(u+T)}f(u+T)du+\cdots+\int_0^T e^{-s[u+(\nu-1)T]}f[u+(\nu-1)T]du+\cdots$$

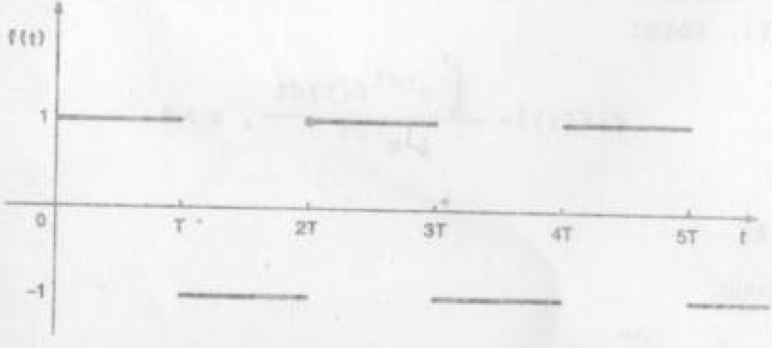
$$=\int_0^T e^{-st}f(t)dt+e^{-sT}\int_0^T e^{-su}f(u)du+\cdots+e^{-s(\nu-1)T}\int_0^T e^{-su}f(u)du+\cdots$$

$$=(1+e^{-sT}+\cdots+e^{-s(\nu-1)T}+\cdots)\int_0^T e^{-st}f(t)dt$$

$$=\frac{\int_0^T e^{-st}f(t)dt}{1-e^{-sT}},\quad s>0 \quad ■$$

Παράδειγμα 4.21.

Θα βρούμε τον Μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης που έχει την παρακάτω γραφική παράσταση:



Σχήμα 4.2

Η συνάρτηση αυτή έχει περίοδο 2T και δίνεται στο διάστημα $[0,2T)$ από τον τύπο:

$$f(t)=\begin{cases}1, & 0\leq t<T\\ -1, & T<t<2T\end{cases}$$

Άρα από το Θεώρημα 4.11 θα έχουμε:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\frac{1}{1-e^{-2sT}}\int_0^{2T} e^{-st}f(t)dt$$

$$=\frac{1}{1-e^{-2sT}}\left[\int_0^T e^{-st}\cdot 1dt+\int_T^{2T} e^{-st}(-1)dt\right]$$

$$=\frac{1}{1-e^{-2sT}}\left[-\frac{1}{s}e^{-sT}+\frac{1}{s}+\frac{1}{s}e^{-2sT}-\frac{1}{s}e^{-sT}\right]$$

$$=\frac{1}{1-e^{-2sT}}\cdot\frac{1}{s}(1-e^{-sT})^2$$

$$=\frac{1}{s}\,\frac{1-e^{-sT}}{1+e^{-sT}}=\frac{1}{s}\,\mathrm{tgh}\,\frac{sT}{2}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να βρεθούν οι παρακάτω Μετασχηματισμοί Laplace:

α) $\mathcal{L}\{e^{-t}\sin^2\alpha t\}$, $\alpha\in\mathbb{R}$

β) $\mathcal{L}\{|\sin kt|\}$, $k\in\mathbb{R}$

γ) $\mathcal{L}\left\{\dfrac{\cos\alpha t-\cos\beta t}{t}\right\}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

Λύση

α) Επειδή

$$\mathcal{L}\{\sin^2\alpha t\}=\mathcal{L}\left\{\frac{1-\cos2\alpha t}{2}\right\}=\frac{1}{2}\mathcal{L}\{1\}-\frac{1}{2}\mathcal{L}\{\cos2\alpha t\}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s}-\frac{1}{2}\cdot\frac{s}{s^2+4\alpha^2}=\frac{2\alpha^2}{s(s^2+4\alpha^2)}$$

από το Θεώρημα 4.3 έχουμε:

$$\mathcal{L}\{e^{-t}\sin^2\alpha t\}=\frac{2\alpha^2}{(s+1)(s^2+2s+1+4\alpha^2)}$$

β) Η συνάρτηση $f(t)=|\sin kt|$ είναι περιοδική με περίοδο $\frac{\pi}{k}$. Άρα από το Θεώρημα 4.11 έχουμε:

$$\mathfrak{L}\{|\sin kt|\}=\frac{1}{1-e^{-s(\pi/k)}}\int_0^{\pi/k} e^{-st}\cdot\sin kt\,dt$$

$$=\frac{1}{1-e^{-s(\pi/k)}}\cdot\frac{k}{s^2+k^2}\left(1+e^{(-s\pi/k)}\right)$$

$$=\frac{k}{s^2+k^2}\,\mathrm{ctgh}\,\frac{s\pi}{2k}$$

γ) Επειδή

$$\lim_{t\to 0}\frac{\cos\alpha t-\cos\beta t}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{-\alpha\sin\alpha t+\beta\sin\beta t}{1}=0$$

και $\mathfrak{L}\{\cos\alpha t-\cos\beta t\}=\frac{s}{s^2+\alpha^2}-\frac{s}{s^2+\beta^2}$ από το θεώρημα 4.10 έχουμε:

$$\mathfrak{L}\left\{\frac{\cos\alpha t-\cos\beta t}{t}\right\}=\int_s^{+\infty}\left[\frac{u}{u^2+\alpha^2}-\frac{u}{u^2+\beta^2}\right]du$$

$$=\frac{1}{2}\log\frac{s^2+\beta^2}{s^2+\alpha^2}$$

2. Έστω $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση, η οποία είναι εκθετικής τάξης α. Υποθέτουμε ακόμα ότι η f' είναι κατά τμήματα συνεχής σε κάθε πεπερασμένο διάστημα $[0,\beta]$, $\beta>0$ και εκθετικής τάξης α. Αν $\mathfrak{L}\{f(t)\}=F(s)$, τότε να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{s\to+\infty} sF(s)=f(0)\quad \text{(ιδιότητα της αρχικής τιμής)}$$

Απόδειξη

Από το θεώρημα 4.6 έχουμε ότι:

$$\mathfrak{L}\{f'(t)\}=sF(s)-f(0)$$

Από την εφαρμογή 1 της §4.2 όμως είναι $\lim_{s\to+\infty}\mathfrak{L}\{f'(t)\}=0$. Συνεπώς

$$\lim_{s\to+\infty} sF(s)=f(0)$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

4.7. Να υπολογίσετε τους Μετασχηματισμούς Laplace των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(t)=t^{\nu}e^{\alpha t}$ β) $f(t)=\cos\alpha t$

γ) $f(t)=e^{\alpha t}\sin\omega t$ δ) $f(t)=e^{\alpha t}\cos\omega t$

ε) $f(t)=\cosh t$ στ) $f(t)=\sinh\alpha t$

ζ) $f(t)=\cosh\alpha t$ η) $f(t)=4\cos^2\alpha t$

4.8. Επίσης των συναρτήσεων:

α) $f(t)=(\sin t-\cos t)^2$ β) $f(t)=e^{-2t}-\cos 2t$

γ) $f(t)=e^{-t}(3\sinh 2t-5\cosh 2t)$ δ) $f(t)=e^{2t}(3\sin 4t-4\cos 2t)$

ε) $f(t)=\cos\alpha t\cdot\cosh\alpha t$ στ) $f(t)=\frac{1}{2\alpha^2}\sin\alpha t\cdot\sinh\alpha t$

4.9. Να αποδείξετε ότι: $\mathfrak{L}\{f'(t)\}=s^{-1}(1-e^{-2s})$, $s>0$ όπου

$$f(t)=\begin{cases} t+1, & 0\leq t\leq 2\\ 3, & t>2\end{cases}$$

Εφαρμόζεται το θεώρημα 4.6;

4.10. Να βρεθεί ο $\mathfrak{L}\{f(t)\}$ αν

α) $$f(t)=\begin{cases} 0, & t<\frac{2\pi}{3}\\ \cos\left(t-\frac{2\pi}{3}\right), & t>\frac{2\pi}{3}\end{cases}$$

β) $$f(t)=\begin{cases} 0, & 0<t<1\\ (t-1)^2, & t>1\end{cases}$$

γ) $$f(t)=\begin{cases} t^2, & 0<t<2\\ 6, & t>2\end{cases}$$

β) $f(t)=\begin{cases} t^2, & 0 < t < 2 \\ t-1, & 2 < t < 3 \\ 7, & t > 3 \end{cases}$

4.11. Να βρεθεί ο $\mathcal{L}\{f''(t)\}$ αν

$$f(t)=\begin{cases} t^2, & 0 < t \leqslant 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases}$$

4.12. Να βρεθεί ο $\mathcal{L}\{f(t)\}$ αν

α) $f(t)=\dfrac{\sin\alpha t-\alpha t\cos\alpha t}{2\alpha^3}$ β) $f(t)=\dfrac{t\sin\alpha t}{2\alpha}$

γ) $f(t)=\dfrac{t\sinh\alpha t}{2\alpha}$ δ) $f(t)=\dfrac{\sinh\alpha t+\alpha t\cosh\alpha t}{2\alpha}$

ε) $f(t)=\dfrac{t^2\sinh\alpha t}{2\alpha}$ στ) $f(t)=\dfrac{1}{2}t^2\cosh\alpha t$

ζ) $f(t)=\dfrac{(3-\alpha^2t^2)\sin\alpha t-3\alpha t\cos\alpha t}{8\alpha^5}$

4.13. Αν $\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)$, να αποδείξετε ότι:

$$\mathcal{L}\{e^{\alpha t}f(\beta t)\}=\frac{1}{\beta}F\left(\frac{s-\alpha}{\beta}\right),\ \alpha,\beta \text{ σταθερές}$$

4.14. Να αποδείξετε ότι:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\sinh t}{t}\right\}=\frac{1}{2}\log\frac{s+1}{s-1}$$

4.15. Αν $\mathcal{L}\{f''(t)\}=\mathrm{Artg}\dfrac{1}{s}$, $f(0)=2$, $f'(0)=-1$ τότε να βρεθεί ο $\mathcal{L}\{f(t)\}$

4.16. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-2t}\cos t\,dt.$

4.17. Να βρεθεί ο $\mathcal{L}\{f(t)\}$ των παρακάτω περιοδικών συναρτήσεων:

α) $f(t)=\begin{cases} \sin t, & 0 \leqslant t \leqslant \pi \\ 0, & \pi < t < 2\pi \end{cases},\ f(t+2\pi)=f(t)$

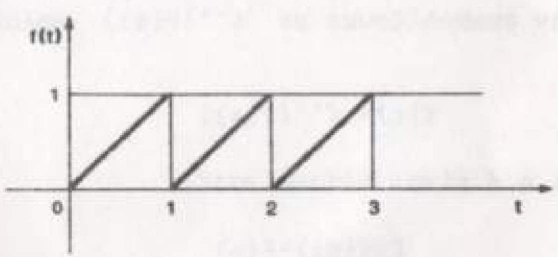
β) $f(t)=\begin{cases} t, & 0 \leqslant t \leqslant c \\ 2c-t, & c<t<2c \end{cases},\ f(t+2c)=f(t)$

γ) $f(t)=t^2,\ 0 < t <2,\ f(t+2)=f(t)$

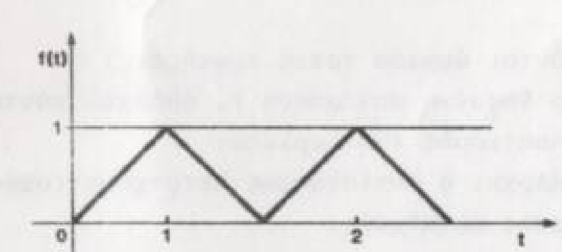
δ) $f(t)=\begin{cases} \sin\omega t, & 0 \leqslant t\leqslant \frac{\pi}{\omega} \\ 0, & \frac{\pi}{\omega}< t < \frac{2\pi}{\omega} \end{cases},\ f\left(t+\frac{2\pi}{\omega}\right)=f(t)$

4.18. Να βρεθεί ο Μετασχηματισμός Laplace των συναρτήσεων που έχουν την παρακάτω γραφική παράσταση:

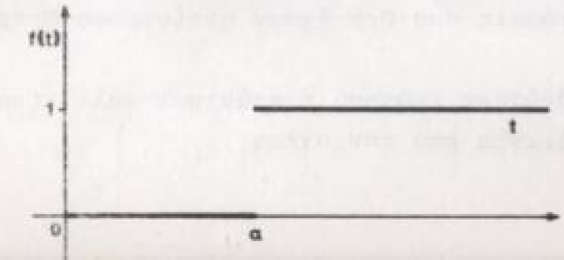
α)



β)



γ)



4.19. Αν $f(x+T)=-f(x), \forall x \geq 0$ τότε να αποδείξετε ότι:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\frac{\int_0^T e^{-st}f(t)dt}{1+e^{-sT}}$$

§ 4.4. ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΤΟΥ LAPLACE

Στις προηγούμενες παραγράφους ασχοληθήκαμε με το εξής πρόβλημα: Για μια δοσμένη συνάρτηση $f:[0,+\infty) \to \mathbb{R}$ να βρεθεί ο Μετασχηματισμός της κατά Laplace $F(s)$. Ας ασχοληθούμε τώρα για λίγο με το αντίστροφο πρόβλημα: Για μια δοσμένη συνάρτηση F, να βρεθεί μια συνάρτηση f, της οποίας ο Μετασχηματισμός του Laplace να είναι η συνάρτηση F. Μια τέτοια συνάρτηση θα την συμβολίζουμε με $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$. Δηλαδή γράφοντας

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

θα εννοούμε ότι η f είναι τέτοια ώστε:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)$$

Ο $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ λέγεται αντίστροφος Μετασχηματισμός του Laplace της F.

Δημιουργούνται άμεσα τρεις ερωτήσεις:

1) Για μια δοσμένη συνάρτηση F, υπάρχει πάντα ο αντίστροφος Μετασχηματισμός του Laplace;

2) Όταν υπάρχει ο αντίστροφος Μετασχηματισμός του Laplace, είναι αυτός μοναδικός;

3) Πως θα βρούμε τον αντίστροφο Μετασχηματισμό του Laplace;

Η απάντηση στην πρώτη ερώτηση είναι όχι **αναγκαστικά**. Υπάρχουν συναρτήσεις που δεν έχουν αντίστροφο Μετασχηματισμό του Laplace.

Για την δεύτερη ερώτηση η απάντηση πάλι είναι γενικά όχι. Για παράδειγμα από την σχέση

$$\int_0^{+\infty} e^{-st}f(t)dt=F(s) \qquad (1)$$

προκύπτει άμεσα ότι αν f_1 και f_2 είναι δυο συναρτήσεις που ταυτίζονται σε όλα τα σημεία, εκτός από ένα πεπερασμένο πλήθος σημείων που διαφέρουν, τότε η τιμή του ολοκληρώματος στην (1) είναι ίδια και για τις δυο συναρτήσεις. Άρα και οι Μετασχηματισμοί τους κατά Laplace ταυτίζονται.

Η ερώτηση όμως παραμένει. Πότε ο αντίστροφος, όταν υπάρχει, είναι μοναδικός; Σ'αυτήν την ερώτηση απαντά το επόμενο θεώρημα, που θα διατυπώσουμε χωρίς απόδειξη.

Θεώρημα 4.12 (Θεώρημα του Lerch). Έστω $f,g:[0,+\infty) \to \mathbb{R}$ δύο συνεχείς συναρτήσεις οι οποίες έχουν τον ίδιο Μετασχηματισμό του Laplace. Τότε $f(t)=g(t), \forall t \geq 0$.

Έτσι αν γνωρίζουμε ότι μια συνάρτηση F έχει έναν συνεχή αντίστροφο Μετασχηματισμό f, τότε δεν υπάρχει άλλη συνεχής συνάρτηση που να έχει αντίστροφο Μετασχηματισμό f.

Παράδειγμα 4.22.

Από το Παράδειγμα 4.1 έχουμε ότι: $\mathcal{L}\{1\}=\frac{1}{s}$, $s>0$. Έτσι ο αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace της $F(s)=\frac{1}{s}$ είναι η συνεχής συνάρτηση $f(t)=1$. Άρα από το Θεώρημα 4.12 δ ε ν υ π ά ρ χ ε ι ά λ λ ο ς σ υ ν ε χ ή ς α ν τ ί σ τ ρ ο φ ο ς Μ ε τ α σ χ η μ α τ ι σ μ ό ς τ η ς $F(s)=\frac{1}{s}$. Μπορεί όμως να υπάρχει ασυνεχής αντίστροφος Μετασχηματισμός της F. Για παράδειγμα έστω

$$g(t)=\begin{cases}1, & 0<t<3\\ 2, & t=3\\ 1, & t>3\end{cases}$$

Τότε:

$$\mathcal{L}\{g(t)\}=\int_0^{+\infty}e^{-st}g(t)dt=\int_0^3 e^{-st}dt+\int_3^{+\infty}e^{-st}dt=\frac{1}{s}, \ s>0$$

Δηλαδή η ασυνεχής συνάρτηση g είναι επίσης αντίστροφος Μετασχηματισμός της $F(s)=\frac{1}{s}$. Τονίζουμε, για μια φορά ακόμα, ότι ο μόνος συνεχής αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace της $F(s)=\frac{1}{s}$ είναι ο $f(t)=1, \forall t\geq 0$.

Ας ασχοληθούμε τώρα με την τρίτη ερώτηση. Υποθέτοντας την ύπαρξη μοναδικού αντίστροφου Μετασχηματισμού Laplace για μια συνάρτηση F, πως θα τον βρούμε;

Πρώτα απ'όλα χρησιμοποιώντας τα θεωρήματα της §4.3 προκύπτουν εύκολα οι παρακάτω ιδιότητες του $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$. Αν $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=f(t)$, τότε:

α) $\mathcal{L}^{-1}\{c_1F_1(s)+c_2F_2(s)\}=c_1\ \mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\}+c_2\ \mathcal{L}^{-1}\{F_2(s)\}$

β) $\mathcal{L}^{-1}\{F(s-\alpha)\}=e^{\alpha t}f(t)$

γ) $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-\alpha s}F(s)\}=\begin{cases} f(t-\alpha), & t>\alpha \\ 0, & t<\alpha \end{cases}$

δ) $\mathcal{L}^{-1}\{F(\alpha s)\}=\frac{1}{\alpha}\,f\left(\frac{t}{\alpha}\right)$ κ.τ.λ.

Οι μέθοδοι υπολογισμού του $\mathcal{L}^{-1}$ αναλύονται στα παραδείγματα που ακολουθούν:

Παράδειγμα 4.23.

Θα βρούμε τον $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+7}{s^2-2s-3}\right\}$

1η μέθοδος: Έχουμε:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+7}{s^2-2s-3}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+7}{(s-1)^2-4}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3(s-1)+10}{(s-1)^2-4}\right\}$$

$$=3\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s-1)^2-4}\right\}+5\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s-1)^2-4}\right\}$$

$$=3e^t\cosh 2t+5e^t\sinh t=4e^{3t}-e^{-t}$$

2η μέθοδος (ανάλυση σε απλά κλάσματα). Αναλύοντας σε απλά κλάσματα έχουμε:

$$\frac{3s+7}{s^2-2s-3}=\frac{3s+7}{(s-3)(s+1)}=\frac{A}{s-3}+\frac{B}{s+1}$$

ή

$$3s+7=A(s+1)+B(s-3)$$

από την οποία εύκολα βρίσκουμε $A=4$ και $B=-1$. Άρα:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+7}{s^2-2s-3}\right\}=4\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\}-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}=4e^{3t}-e^{-t}$$

Παράδειγμα 4.24.

Είναι:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2+s+1}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right\}$$

$$=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right\}$$

$$=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right\}+\frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right\}$$

$$=e^{-(1/2)t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-(1/2)t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

Παράδειγμα 4.25.

Ας υπολογίσουμε τον $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1-e^{-\pi s}}{s(s^2+2s+5)}\right\}$. Έχουμε:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1-e^{-\pi s}}{s(s^2+2s+5)}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+2s+5)}\right\}-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s}}{s(s^2+2s+5}\right\}$$

Αλλά

$$\frac{1}{s(s^2+2s+5)}=\frac{A}{s}+\frac{Bs+\Gamma}{s^2+2s+5}$$

απ'όπου $A=\frac{1}{5}$, $B=-\frac{1}{5}$, $\Gamma=-\frac{2}{5}$

Συνεπώς:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+2s+5)}\right\}=\frac{1}{5}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}-\frac{1}{5}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+1)^2+4}\right\}$$

$$=\frac{1}{5}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}-\frac{1}{5}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+1)^2+4}\right\}-\frac{1}{10}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s+1)^2+4}\right\}$$

$$=\frac{1}{5}-\frac{1}{5}e^{-t}\cos 2t-\frac{1}{10}e^{-t}\sin 2t$$

Ας θεωρήσουμε τώρα τον

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s}}{s(s^2+2s+5)}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\{e^{-\pi s}F(s)\},\ \text{όπου}\quad F(s)=\frac{1}{s(s^2+2s+5)}$$

Από την ιδιότητα γ) είναι:

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-\pi s}F(s)\}=\begin{cases}0, & 0<t<\pi\\ f(t-\pi), & t>\pi\end{cases}$$

Επομένως:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s}}{s(s^2+2s+5)}\right\}=\begin{cases}0,\ 0<t<\pi\\[2mm] \frac{1}{5}-\frac{1}{5}e^{-(t-\pi)}\cos 2(t-\pi)-\frac{1}{10}e^{-(t-\pi)}\sin 2(t-\pi),\ t>\pi\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0,\ 0<t<\pi\\[2mm] \frac{1}{5}-\frac{1}{5}e^{-(t-\pi)}\cos 2t-\frac{1}{10}e^{-(t-\pi)}\sin 2t,\ t>\pi\end{cases}$$

Τελικά λοιπόν έχουμε:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1-e^{-\pi s}}{s(s^2+2s+5)}\right\}=\begin{cases}\frac{1}{5}\left[1-e^{-t}\left(\cos 2t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\right],\ 0<t<\pi\\[2mm] \frac{e^{-t}}{5}\left[(e^{\pi}-1)\cos 2t+\left(\frac{e^{\pi}-1}{2}\right)\sin 2t\right],\ t>\pi\end{cases}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

4.20. Να αποδείξετε ότι:

α) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s+\alpha)^2+\beta^2}\right\}=\frac{1}{\beta}e^{-\alpha t}(\beta\cos\beta t-\alpha\sin\beta t)$

β) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2+6s+25}\right\}=e^{-3t}\left(\cos 4t-\frac{1}{2}\sin 4t\right)$

4.21. Να υπολογίσετε τον $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ αν

α) $F(s)=\frac{6s-4}{s^2-4s+20}$ β) $F(s)=\frac{s^2+2s+3}{(s^2+2s+2)(s^2+2s+5)}$

γ) $F(s)=\frac{3s-8}{s^2+4}-\frac{4s-24}{s^2-16}$ δ) $F(s)=\frac{s^2}{(s+2)^3}$

ε) $F(s)=\frac{(s+1)e^{-\pi s}}{s^2+s+1}$ στ) $F(s)=\frac{1}{s^3(s^2+1)}$

4.22. Να αποδείξετε ότι:

α) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+2}{4s^2+12s+9}\right\}=\frac{3}{4}e^{-(3/2)t}-\frac{5}{8}te^{-(3/2)t}$

β) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-3s}}{s^2-2s+5}\right\}=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{t-3}\sin 2(t-3), & t>3\\ 0, & t<3\end{cases}$

γ) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2}{(s^2+4)^2}\right\}=\frac{1}{2}t\cos 2t+\frac{1}{4}\sin 2t$

4.23. Αν $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=f(t)$, να αποδείξετε ότι:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(\alpha s+\beta)\}=\frac{1}{\alpha}e^{-(\beta/\alpha)t}f\left(\frac{t}{\alpha}\right),\ \alpha>0$$

§ 4.5. ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 4

4.24. Να αποδείξετε ότι:

α) $\mathcal{L}\{4e^{5t}+6t^3-3\sin 4t+2\cos 2t\}=\frac{4}{s-5}+\frac{36}{s^4}-\frac{12}{s^2+16}+\frac{2s}{s^2+4}$

β) $\mathcal{L}\{e^{4t}\cosh 5t\}=\frac{s-4}{s^2-8s-9}$

γ) $\mathcal{L}\{(t^2+1)\sinh 2t-2t\cosh 2t\}=\frac{80-4s^2}{(s^2-4)^3}$

δ) $\mathcal{L}\{\sinh t\cdot\sin t\}=\frac{2s}{s^4+4}$

4.25. Εκίσης ότι:

α) $\mathcal{L}\{f(t)\}=\frac{1-e^{-s}(s+1)}{s^2(1-e^{-2s})}$ όπου $f(t)=\begin{cases} t, & 0\leqslant t\leqslant 1 \\ 0, & 1<t\leqslant 2\end{cases}$, $f(t+2)=f(t)$

β) $\mathcal{L}\{f(t)\}=\frac{s+(s-1)e^{-\pi s}}{s^2+1}$ όπου $f(t)=\begin{cases} \cos t, & 0\leqslant t\leqslant \pi \\ \sin t, & t>\pi\end{cases}$

γ) $\mathcal{L}\{f(t)\}=\frac{1}{s^2}+\left(\frac{a}{s+1}-\frac{1}{s^2}-\frac{a}{s}\right)a^{-as}$ όπου $f(t)=\begin{cases} t, & 0<t<a \\ ae^{-(t-a)}, & t\geqslant a\end{cases}$

4.26. Ποιές συναρτήσεις έχουν τους ακόλουθους Μετασχηματισμούς Laplace;

α) $\frac{s-2}{s^2+4s+3}$ β) $\frac{s^2-1}{s(s^2+1)}$ γ) $\frac{s+1}{s(s-1)^2}$

δ) $\frac{4s+12}{s^2+8s+16}$ ε) $\frac{1}{(s-1)(s^2+1)}$ στ) $\frac{s-1}{(s+3)(s^2+2s+2)}$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

① ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ - ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ - ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κεφάλαιο 1

1.1. α) $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+x$ β) $-\frac{2}{3x\sqrt{x}}-e^x+\log|x|$ γ) $-2\sqrt{1-x^2}-\frac{2}{3}\sqrt{(\mathrm{Arsin}x)^3}$

δ) $\frac{3m}{\beta}\sqrt[3]{\alpha+\beta x}$ ε) $\log|x|+2\mathrm{Artg}x$ στ) $-\frac{1}{3}e^{-x^3}$

1.2. α) $\frac{x}{2}+\frac{5}{4}\log|2x-1|$ β) $\log\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$ γ) $\frac{1}{\cos x}$

δ) $\frac{1}{k}\sin kx$ ε) $-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}$ στ) $\frac{1}{\log 2}\mathrm{Arsin}2^x$

1.3. α) $\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}$ β) $\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}$ γ) $-\frac{1}{4}\left(\frac{\cos 4x}{2}+\cos 2x\right)$

δ) $\frac{1}{\alpha}\mathrm{Artg}\frac{x}{\alpha}$ ε) $\log|e^x+1|$ στ) $\frac{1}{2}(\mathrm{tg}x+x)$

1.4. α) $-\frac{\sqrt{\alpha^2-x^2}}{x}-\mathrm{Arsin}\frac{x}{\alpha}$ β) $\frac{1}{\alpha}\log\left|\frac{\alpha-\sqrt{\alpha^2-x^2}}{x}\right|$

γ) $\frac{\alpha^2}{2}\mathrm{Arsin}\frac{x}{\alpha}-\frac{x}{2}\sqrt{\alpha^2-x^2}$ δ) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

1.5. α) $\frac{x}{2}\sqrt{\alpha^2+x^2}+\frac{\alpha^2}{2}\log|x+\sqrt{x^2+\alpha^2}|$ β) $-\frac{\sqrt{x^2+\alpha^2}}{\alpha^2 x}$

γ) $\frac{1}{2\nu+1}\,\frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+\alpha^2}}\right)^{2\nu+1}$ δ) $\frac{1}{2}\log\left|\frac{-1+\sqrt{1+x^4}}{x^2}\right|$

1.6. α) $-\frac{1}{\alpha^2}\;\frac{x}{\sqrt{x^2-\alpha^2}}$ β) $\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

1.7. α) $2\{\sqrt{x+1}-\log(1+\sqrt{x+1})\}$ β) $\frac{2}{3}(\sin x+\cos x)^{3/2}$

γ) $\frac{1}{\alpha}e^{\alpha \mathrm{Arsin} x}$ δ) $\frac{1}{\alpha}e^{\alpha \mathrm{Artg} x}$

1.8. α) $\log\left|\cos\frac{1}{x}\right|$ β) $\mathrm{Artg}\,e^{x}$

γ) $e^{x+(1/x)}$ δ) $\frac{1}{\alpha\beta}\sqrt{\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\cos x}$

ε) $\mathrm{Artg}\left(\alpha x+\frac{\beta}{x}\right)$ στ) $\frac{\alpha^2}{2}\mathrm{Arcos}\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)-\sqrt{2\alpha x-x^2}\cdot\frac{x-\alpha}{2}$

1.9. α) $2\mathrm{Artg}\sqrt{\frac{x-\alpha}{\beta-x}}$ β) $-\frac{1}{2}\log^2\left(1+\frac{1}{x}\right)$

γ) $2\mathrm{Arsin}\sqrt{x}$ δ) $\frac{1}{2}\alpha^2\mathrm{Arcos}\frac{x}{\alpha}+\frac{x-2\alpha}{2}\sqrt{\alpha^2-x^2}$

1.10. α) $x\sin x+\cos x$ β) $x(\log x-1)$

γ) $x\mathrm{Artg}x-\frac{1}{2}\log(1+x^2)$ δ) $x\,\mathrm{tg}x+\log|\cos x|$

1.11. α) $x(\mathrm{Arsin}x)^2+2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{Arsin}x-2x$

β) $\frac{1}{2}x\sqrt{A+x^2}+\frac{A}{2}\log|x+\sqrt{A+x^2}|$

γ) $\frac{x}{2}\{\cos(\log x)+\sin(\log x)\}$

δ) $x\log(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\mathrm{Arsin}x$

1.12. α) $-e^{-x}(x^2+5)$

β) $\left(\frac{3}{2}x^3-\frac{9}{4}x^2+\frac{9}{4}x-\frac{77}{8}\right)e^{2x}$

γ) $\left(\frac{x}{2}+\frac{3}{4}\right)\cos 2x+\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}\right)\sin 2x$

δ) $(x^4-10x^2+21)\sin x+x(4x^2-20)\cos x$

1.13. α) $\frac{1}{2}e^{x}\{(x^2-1)\sin x-(x-1)^2\cos x\}$

β) $\frac{xe^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha\cos\beta x+\beta\sin\beta x)-\frac{e^{\alpha x}}{(\alpha^2+\beta^2)^2}[(\alpha^2-\beta^2)\cos\beta x+2\alpha\beta\sin\beta x]$

γ) $\frac{e^x}{2}(x-1)-\frac{xe^x}{10}(\cos 2x+2\sin 2x)+\frac{e^x}{50}(4\sin 2x-3\cos 2x)$

δ) $\frac{1}{2}\quad\frac{2\alpha\sin\beta x-\beta\cos\beta x}{4\alpha^2+\beta^2}e^{2\alpha x}-\frac{1}{2\beta}\cos\beta x$

1.14. α) $\frac{x^2}{2}\mathrm{Artg}x-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{Artg}x$

β) $\frac{1}{2}(\log x)^2+\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{x}\right)\log x-\left(\frac{x^2}{4}+\frac{1}{x}\right)$

γ) $2\sqrt{x+1}\,\mathrm{Arsin}x+4\sqrt{1-x}$

δ) $(\sqrt{1-x^2})^{-1}\mathrm{Arsin}x-\log|1-x^2|$

ε) $\frac{1}{2}e^{m\mathrm{Artg}x}\left[\frac{1}{m}+\frac{1}{m^2+4}\;\frac{4x-mx^2+m}{1+x^2}\right]$

στ) $\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{Artg}x-\log(x+\sqrt{1+x^2})$

1.15. α) $\frac{x}{1+\cos x}-\mathrm{tg}\frac{x}{2}$

β) $\frac{x-2}{x+2}e^{x}$

γ) $\frac{\sin x-x\cos x}{\cos x+x\sin x}$

δ) $\frac{\sin x}{\cos x+x\sin x}$

1.16. α) $\frac{x^2-1}{2}\log\frac{1-x}{1+x}-x$

β) $3\{(2-\sqrt[3]{x^2})\cos\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{x}\sin\sqrt[3]{x}\}$

γ) $x\mathrm{Arcos}\sqrt{\frac{x}{x+1}}-\mathrm{Artg}\sqrt{x}+\sqrt{x}$

δ) $\frac{x}{4}(x^2-2)\sqrt{4-x^2}+2\mathrm{Arsin}\frac{x}{2}$

ε) $x\,\mathrm{Arcos}\,\frac{1}{x}-\log(x+\sqrt{x^2-1})$

στ) $\frac{e^{m\omega}}{1+m^2}(\sin\omega+m\cos\omega)$, όπου $\omega=\mathrm{Artg}x$

ζ) $-e^x\mathrm{ctg}\,\frac{x}{2}$

η) $\frac{\cos x}{x\cos x-\sin x}$

θ) $\frac{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}{9x^3}\left\{2-3\log\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right\}$

ι) $-\cos x\cdot\log(\mathrm{tg}x)+\log\left|\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\right|$

1.17. α) $\log\alpha A_\nu=x^\nu\alpha^x-\nu A_{\nu-1}$

β) $B_\nu=-\frac{1}{k}x^\nu\cos kx+\frac{\nu}{k^2}x^{\nu-1}\sin kx-\frac{\nu(\nu-1)}{k^2}B_{\nu-2}$

γ) $\Gamma_\nu=\frac{x^{\nu-1}\sqrt{x^2+a^2}}{\nu}-\frac{\nu-1}{\nu}a^2\Gamma_{\nu-2}$

δ) $\Delta_\nu=e^{\alpha x}\sin^{\nu-1}\beta x\,\frac{\alpha\sin\beta x-\nu\beta\cos\beta x}{\alpha^2+\nu^2\beta^2}+\frac{\nu(\nu-1)\beta^2}{\alpha^2+\nu^2\beta^2}\Delta_{\nu-2}$

ε) $(\nu\rho+1)\theta_\nu=x(\alpha+\beta x^\rho)^\nu+\alpha\nu\rho\theta_{\nu-1}$

1.19. α) $\frac{1}{7}\log\left|\frac{x-2}{x+5}\right|$

β) $\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{Artg}\,\frac{x+1}{\sqrt{2}}$

γ) $\frac{1}{4\sqrt{2}}\log\left|\frac{2\sqrt{2}+x+2}{2\sqrt{2}-(x+2)}\right|$

δ) $\frac{1}{2a}\log\frac{x-a}{x+a}$

ε) $\frac{1}{2a}\log\frac{a+x}{a-x}$

στ) $\frac{51}{\sqrt{2}}\mathrm{Artg}\frac{x+6}{\sqrt{2}}-\frac{7}{2}\log(x^2+12x+38)$

ζ) $\frac{1}{2}\log(x^2+4x+5)-\mathrm{Artg}(x+2)$

η) $\frac{3}{8}\left\{\log(4x^2-4x+17)+\frac{1}{6}\mathrm{Artg}\frac{2x-1}{4}\right\}$

1.20. α) $x-2\log(x^2+2x+2)+3\mathrm{Artg}(x+1)$

β) $x-\frac{\alpha^3}{\alpha-\beta}\,\frac{1}{x-\alpha}+\frac{(2\alpha-3\beta)\alpha^2}{(\alpha-\beta)^2}\log|x-\alpha|+\frac{\beta^3}{(\alpha-\beta)^2}\log|x-\beta|$

γ) $\log\frac{(x-1)^2}{|x|}-\frac{x}{(x-1)^2}$

δ) $\frac{1}{x-2}+\frac{2}{3}\log\left|\frac{x-2}{x+1}\right|$

ε) $\frac{1}{\beta^2-\alpha^2}\left\{\frac{1}{\alpha}\mathrm{Artg}\,\frac{x}{\alpha}-\frac{1}{\beta}\mathrm{Artg}\,\frac{x}{\beta}\right\}$

στ) $\frac{3}{4}\log|x^2-1|+\frac{1}{4}\log(x^2+1)-2\log x$

ζ) $\frac{1}{4}\log\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\left\{\mathrm{Artg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\mathrm{Artg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right\}$

η) $\mathrm{Artg}\frac{x^2-1}{x}$

1.21. α) $\frac{1}{8}\,\frac{x+1}{x^2+4x+5}+\frac{1}{16}\mathrm{Artg}\frac{x+1}{2}$

β) $\frac{3}{8}\mathrm{Artg}(x+1)+\frac{3}{8}\,\frac{x+1}{x^2+2x+2}+\frac{x}{4(x^2+2x+2)^2}$

γ) $\frac{1}{8}\log x^2(x^2+4)^3$

δ) $\frac{2}{3}\log\left|\frac{x^3+1}{x^3}\right|-\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{3(x^3+1)}$

ε) $\frac{1}{2}\,\frac{1+x}{(1+x^2)^2}+\frac{1}{4}\,\frac{x-2}{x^2+1}+\frac{1}{4}\mathrm{Artg}x$

στ) $-\frac{57x^4+103x^2+32}{8x(x^2+1)^2}-\frac{57}{8}\mathrm{Artg}x$

1.22. α) $\log\frac{(\sqrt{x+1}-1)^2}{x+\sqrt{x+1}+2}-\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{Artg}\frac{2\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{3}}$

β) $\log\left|\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right|+2\mathrm{Artg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

γ) $\frac{\sqrt{x^2-1}}{2}(x-2)+\frac{1}{2}\log|x+\sqrt{x^2-1}|$

δ) $(\sqrt{x}-2)\sqrt{1-x}-\mathrm{Arsin}\sqrt{x}$

3. α) $\frac{3}{2}x^{2/3}+6\mathrm{Artg}\sqrt[6]{x}$

β) $6\left[\frac{1}{9}(x+1)^{3/2}-\frac{1}{8}(x+1)^{4/3}+\frac{1}{7}(x+1)^{7/6}-\frac{1}{6}(x+1)+\frac{1}{5}(x+1)^{5/6}\right.$

$\left.-\frac{1}{4}(x+1)^{2/3}\right]$

γ) $\frac{1}{2}\log\frac{2}{(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1})^3}+\sqrt{3}\mathrm{Artg}\frac{2\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x-1}}{3\sqrt[3]{x-1}}$

δ) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2}$

4. α) $\log(x+1+\sqrt{x^2+2x+2})+\frac{2}{x+2+\sqrt{x^2+2x+2}}$

β) $-2\mathrm{Artg}\frac{\sqrt{-x^2+x+1}-1}{x}$

γ) $\sqrt{\frac{2}{3}}\mathrm{Artg}\sqrt{\frac{2}{3}\cdot\frac{3-x}{x-2}}$

δ) $\frac{1}{4}(x+\sqrt{x^2-1})^2-\frac{1}{2}\log|x+\sqrt{x^2-1}|$

ε) $\frac{1}{\sqrt{3}}\log\left|\frac{x+\sqrt{x^2-2x+3}-\sqrt{3}}{x+\sqrt{x^2-2x+3}+\sqrt{3}}\right|$

στ) $\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)\sqrt{3x^2-3x+1}+\frac{1}{8\sqrt{3}}\log\left|\sqrt{3x^2-3x+1}+\frac{\sqrt{3}}{2}(2x-1)\right|$

ζ) $\frac{1}{2}\left\{(x+2)\sqrt{1-4x-x^2}+5\mathrm{Arsin}\frac{x+2}{\sqrt{5}}\right\}$

η) $\frac{1}{2\sqrt{2}}\log\left|\frac{\sqrt{2+2x^2}-x}{\sqrt{2+2x^2}+x}\right|+\log(x+\sqrt{x^2+1})$

. α) $\frac{1}{2}(3-x)\sqrt{1-2x-x^2}+2\mathrm{Arsin}\frac{x+1}{\sqrt{2}}$

β) $\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)\sqrt{4x^2-4x+3}+\frac{1}{2}\log|2x-1+\sqrt{4x^2-4x+3}|$

γ) $-\frac{1}{\sqrt{3}}\log\left|\frac{3+3x+2\sqrt{3(x^2+x+1)}}{x-1}\right|$

δ) $\frac{\sqrt{2x^2-2x+1}}{x}$

ε) $\mathrm{Arcos}\frac{x}{(x-1)\sqrt{2}}$

στ) $\mathrm{Artg}\sqrt{4x+5}$

ζ) $\frac{1}{2\sqrt{2}}\log\left|\frac{\sqrt{2}x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{2}x-\sqrt{1+x^2}}\right|$

η) $\frac{1}{2}\log\left|\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x}\right|+\frac{1}{\sqrt{2}}\log\left|\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2}x}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}x}\right|$

1.26. α) $\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{24}{11}x\sqrt[4]{x^3}+\frac{36}{13}x^2\sqrt[4]{x}+\frac{8}{5}x^2\sqrt{x}+\frac{6}{17}x^2\sqrt[4]{x^5}$

β) $-\frac{1}{5}x^{-5}(1+2x^3)^{5/3}$

γ) $\frac{1}{3}\frac{z}{z^2-1}-\frac{1}{6}\log\left|\frac{z-1}{z+1}\right|$, όπου $z=\sqrt{1+x^{-3}}$

δ) $\frac{1}{4}\log\left|\frac{\sqrt[4]{1+x^4}+x}{\sqrt[4]{1+x^4}-x}\right|-\frac{1}{2}\mathrm{Artg}\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}$

ε) $\frac{3}{7}(4\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}-3)\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}$

στ) $\frac{u}{2(u^3+1)}-\frac{1}{6}\log\frac{u+1}{\sqrt{u^2-u+1}}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\mathrm{Artg}\frac{2u-1}{\sqrt{3}}$, όπου $u=\sqrt[3]{\frac{1-x^2}{x^2}}$

1.27. α) $\frac{1}{3}\log\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right|+\frac{5}{3}\log\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}-3\right|-\log\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}-1\right|$

β) $\log|2+\sin x|$

γ) $\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\log\left|\mathrm{tg}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\mathrm{Artg}\frac{\alpha}{\beta}\right)\right|$

δ) $\frac{1}{4}\log|\sin x+\cos x|-\frac{1}{4}\cos x(\sin x+\cos x)$

ε) $\frac{1}{2}\{x+\log|\sin x+\cos x|\}$

στ) $-\frac{1}{1-\cos x}$

1.28. α) $\log|\cos x+\sin x|$

β) $\frac{2}{3}\mathrm{Artg}\left\{\frac{1}{3}\left(5\mathrm{tg}\frac{x}{2}+4\right)\right\}$

γ) $\frac{1}{\sqrt{2}}\text{Artg}(\sqrt{2}\text{tg}x)$

δ) $2\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)$

ε) $2\sqrt{\text{tg}x}$

στ) $\frac{1}{\sqrt{2}}\{\log(\sin x+\cos x-\sqrt{\sin 2x})+\text{Arsin}(\sin x-\cos x)\}$

. α) $4\sqrt[4]{\text{tg}x}$

β) $\frac{1}{4}(\text{tg}^4x-\text{ctg}^4x)+2(\text{tg}^2x-\text{ctg}^2x)+6\log|\text{tg}x|$

γ) $-\frac{\cos^3x}{2\sin^2x}-\frac{3}{2}\cos x+\frac{3}{4}\log\left|\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right|$

δ) $\frac{1}{3}\sin^3x-\frac{2}{5}\sin^5x+\frac{1}{7}\sin^7x$

. α) $A_\nu=\cos^{\nu-1}qx\frac{p\sin px\cos qx-\nu q\cos px\sin qx}{p^2-\nu^2q^2}-\frac{\nu(\nu-1)q^2}{p^2-\nu^2q^2}A_{\nu-2}$

β) $B_\nu=\frac{\sin^2px}{p^2-\nu^2q^2}\frac{d}{dx}\left(\frac{\cos^\nu qx}{\sin px}\right)-\frac{\nu(\nu-1)q^2}{p^2-\nu^2q^2}B_{\nu-2}$

γ) $\Gamma(\nu,p)=2\Delta(\nu-1,p-1)+\Gamma(\nu-2,p)$

δ) $\Delta(\nu,p)=2\Gamma(\nu-1,p-1)+\Delta(\nu-2,p)$

ε) $E_\nu=-\frac{\sin^{\nu-1}px}{(\nu-1)p}+E_{\nu-2}$

στ) $Z_\nu=2\frac{\sin(\nu-1)x}{\nu-1}-Z_{\nu-2}$

. α) $\frac{1}{3}\sinh^3x+\frac{1}{5}\sinh^5x$ β) $\log|\text{tgh}x|$

γ) $\frac{1}{2}\log\frac{1+\sqrt{\text{tgh}x}}{|1-\sqrt{\text{tgh}x}|}-\text{Artg}\sqrt{\text{tgh}x}$ δ) x

Σωστό ή λάθος;

1) Λ	2) Σ	3) Λ	4) Λ	5) Σ
6) Λ	7) Λ	8) Λ	9) Λ	10) Σ

1.32. α) $\frac{1}{4}e^{2x^2}$

β) $\frac{x-k\sqrt{1-x^2}}{1+k^2}e^{k\text{Arcos}x}$

γ) $\alpha\log\left|\frac{\alpha-\sqrt{\alpha^2-x^2}}{x}\right|+\sqrt{\alpha^2-x^2}$

δ) $e^x\frac{x-1}{x+1}$

1.33. α) $\text{Arcos}\frac{1}{x}-\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$

β) $\frac{2x^2-1}{3x^3}\sqrt{1+x^2}$

γ) $x\text{tg}\frac{x}{2}$

δ) $\log\frac{x-\cos\alpha+\sqrt{x^2-2x\cos\alpha+1}}{|\sin\alpha|}$

ε) $-\frac{\sqrt{2x+1}}{x}+\log\left|\frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{2x+1}+1}\right|$

στ) $\log|x+\alpha\log x|$

ζ) $\frac{1}{x(1-\log x)}$

η) $\frac{1}{x}\log|\log x|$

1.34. α) $\frac{1}{2}x^2e^{x^2}$

β) $\frac{1}{x}\log(\alpha^2+\beta^2x^2)+\frac{2\beta}{\alpha}\text{Artg}\frac{\beta}{\alpha}x$

γ) $x\text{tg}x+\log|\cos x|-\frac{1}{2}x^2$

δ) $\frac{1}{2}x^2\text{Arsin}x^2+\frac{1}{2}\sqrt{1-x^4}$

ε) $x\text{Arsin}\sqrt{\frac{x}{x+1}}+\text{Artg}\sqrt{x}-\sqrt{x}$

στ) $x\text{Artg}(1+\sqrt{x})-\sqrt{x}-\log|x+2\sqrt{x}+2|$

ζ) $\log\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right|-\frac{\text{Arsin}x}{x}$

η) $-\frac{\text{Artg}x}{x}+\log\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{1}{2}(\text{Artg}x)^2$

35. α) $2\sqrt{e^x-1}-2\text{Artg}\sqrt{e^x-1}$

β) $2x\sqrt{1+e^x}-4\sqrt{1+e^x}-2\log\left|\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right|$

γ) $-\frac{1}{x\sin x+\cos x}$

δ) $-\frac{x+2}{2(x^2+2x+3)}-\frac{\sqrt{2}}{4}\text{Artg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}$

ε) $-\frac{2}{\sqrt{x}}\log\frac{1}{1-x}+2\log\left|\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right|$

στ) $-\frac{\log x}{\sqrt{x^2-1}}+\text{Arcos}\frac{1}{x}$

ζ) $\frac{1}{2}x^2\log(1+x^3)-\frac{3}{4}x^2-\frac{1}{2}\log|x+1|+\frac{1}{4}\log(x^2-x+1)+\frac{\sqrt{3}}{2}\text{Artg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$

η) $\text{tg}x\cdot\log(\cos x)+\text{tg}x-x$

6. α) $2\sqrt{\frac{x}{1-x}}-2\text{Artg}\sqrt{\frac{x}{1-x}}$

β) $-\sqrt{-x^2-3x}-\text{Artg}\sqrt{-1-\frac{3}{x}}$

γ) $\frac{2x-1}{4}\sqrt{x^2-x+1}+\frac{19}{8}\log|2x-1+2\sqrt{x^2-x+1}|$

δ) $\frac{1}{\sqrt{2}}\text{Artg}\sqrt{\frac{1+x^4}{2x^2}}$

ε) $\log\left|\frac{e^x-1+\sqrt{e^{2x}+4e^x+1}}{e^x+1+\sqrt{e^{2x}+4e^x+1}}\right|$

στ) $-\log(x^2-2x+2)-\text{Artg}(x-1)$

ζ) $\frac{1}{2}\left(\text{Artg}x-\frac{x}{1+x^2}\right)$

η) $-\frac{4x+1}{3(x^2-x+1)}-\frac{8}{3\sqrt{3}}\text{Artg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$

. α) $\frac{1}{2}\text{Artg}\left(\frac{1}{2}\text{tg}x\right)$

β) $\text{Arsin}\left\{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right\}$

γ) $\frac{\sqrt{2}}{2}\left\{\text{Artg}\frac{\text{tg}x}{\sqrt{2+\text{tg}^2x}}+\log(\text{tg}x+\sqrt{2+\text{tg}^2x})\right.$

δ) $\log\left|1+\text{tg}\frac{x}{2}\right|$

ε) $-\text{ctg}x+\log|1+\text{ctg}x|$

στ) $\frac{1}{2(\alpha^2-\beta^2)}\cdot\frac{x}{\alpha^2\cos^2x+\beta^2\sin^2x}-\frac{1}{2\alpha\beta(\alpha^2-\beta^2)}\text{Artg}\left(\frac{\beta}{\alpha}\text{tg}x\right)$, αν $\alpha\neq\beta$ και

$\frac{1}{8\alpha^4}(\sin 2x-2x\cos 2x)$ αν $\alpha=\beta$

1.38. α) $\sqrt{1-x^2}+\log\left|x\,\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right|$

β) $-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1-x^3}{x^3}}-\frac{2}{3}\text{Arsin}\sqrt{x^3}$

γ) $3\{\log|u|-\log(1+\sqrt{1-u^2})-\text{Arsin}u\}$, $u=\sqrt[3]{x}$

δ) $-\frac{1}{8}\log(x+\sqrt{x^2-1})+\frac{1}{8}x(2x^2-1)\sqrt{x^2-1}$

ε) $x\text{Artg}\sqrt{1-x^2}-\text{Arsin}x+\sqrt{2}\text{Artg}\frac{x}{\sqrt{2}\sqrt{1-x^2}}$

στ) $x\text{Artg}x\cdot\log(1+x^2)-\frac{1}{4}\log^2(1+x^2)-2x\text{Artg}x+\log(1+x^2)+(\text{Artg}x)^2$

ζ) $\frac{1}{\sqrt{2}}\text{Artg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$ (Να θέσετε $t=\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$)

η) $\frac{x+k}{(1+k^2)\sqrt{1+x^2}}e^{k\text{Artg}x}$

Κεφάλαιο 2

2.1. α) $L(P,f)=\frac{\pi}{3}\left(0+\frac{\sqrt{3}}{2}+0\right)=\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$, $U(P,f)=\frac{\pi}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi(\sqrt{3}+1)}{3}$

$L(P,f)=\frac{\pi}{6}(1+\sqrt{3})$, $U(P,f)=\frac{\pi}{6}(3+\sqrt{3})$

γ) $L(P_\nu,f)=4-\frac{2}{\nu}$, $U(P_\nu,f)=4+\frac{2}{\nu}$

.2. Να εργαστείτε όπως στο Παράδειγμα 2.2. Είναι $L(P_\nu,f)=\frac{1}{3}\left(1-\frac{3}{2\nu}+\frac{1}{2\nu^2}\right)$

και $U(P_\nu,f)=\frac{1}{3}\left(1+\frac{3}{2\nu}+\frac{1}{2\nu^2}\right)$

3. α) Να θεωρήσετε την διαμέριση $P=\{-1=x_0,x_1,\dots,x_\nu=0=y_0,y_1,\dots,y_\nu=1\}$ χωρίζοντας το $[-1,1]$ σε 2ν ίσα υποδιαστήματα.

β) Να χωρίσετε το $[0,1]$ σε 2ν ίσα υποδιαστήματα. Τότε

$$L(P_{2\nu},f)=\frac{\nu-1}{2\nu},\quad U(P_{2\nu},f)=\frac{1}{2}$$

. Να παρατηρήσετε ότι: $m_f\le f(x)\le g(x)\le M_g$, $\forall x\in[\alpha,\beta]$.

6. α) Να λάβετε υπόψη το Παράδειγμα 2.2.

β) Να λάβετε υπόψη την άσκηση 2.3.

γ) $L(P,f)=\frac{1}{\nu}\,\frac{e-1}{e^{1/\nu}-1}$, $U(P,f)=\frac{1}{\nu}\,\frac{e^{1+(1/\nu)}-e^{\frac{1}{\nu}}}{e^{1/\nu}-1}$

7. Να εργαστείτε όπως στις εφαρμογές 1 και 2 της §2.4

3. α) Ναι (Θεώρημα 2.8) β) Ναι γ) Ναι δ) όχι, δεν είναι φραγμένη.

. α) $k\ge 2$ β) $k\le 0$

10. α) $\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}$ β) $\int_0^1 x^p dx$ γ) $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ δ) $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+x}}$ ε) $\int_0^1\frac{x^2}{1+x^3}dx$

1. Να εργαστείτε όπως στην εφαρμογή 3 της §2.5

2. $F'(x)=2x\sin\frac{\pi}{x}-\pi\cos\frac{\pi}{x}$ για $x\neq 0$ και $F'(0)=0$. Η συνάρτηση $f=F'$ είναι ασυνεχής στο 0 και έτσι το θεώρημα 2.19 δεν εφαρμόζεται. Το θεώρημα 2.20 εφαρμόζεται και δίνει $\int_{-2}^{2}f(x)dx=F(2)-F(-2)=8$.

3. Δεν είναι φραγμένη σε μια περιοχή του μηδενός (Παράδειγμα 2.18)

4. Η F δεν είναι συνεχής για $x=0$ και $x=1$.

2.15. $F(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{2}, & 0\le x<1\\ x-\frac{1}{2}, & 1\le x<2\\ \frac{x^2-1}{2}, & 2\le x\le 3\end{cases}$ Είναι παραγωγίσιμη για $x\neq 2$

2.16. Να εφαρμόσετε το θεώρημα παραγώγισης σύνθετης συναρτήσεως.

2.17. α) $\frac{\sin 2x}{2x^2}$ β) x γ) $-4x\log x$ δ) $-9x^2\log x$

ε) $-\log^2 x+2\log^2 2x$ στ) $\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos x$

ζ) $(1+x^2)^{1/2}-2x(1+x^4)^{1/2}$ η) $\cos x\cdot\cos(\sin x)$

2.18. α) Ακρότατα στα σημεία $x=k\pi$, $k=1,2,\dots$ Μέγιστα αν k περιττός, ελάχιστα αν k άρτιος.

β) ελάχιστο για $x=-\frac{1}{2}$, το $\log\frac{13}{8}+\frac{3\pi}{4}-3\mathrm{Artg}\frac{3}{2}$

2.19. $F'(x)=f(x+1)-f(x)<0$

2.20. Να θεωρήσετε την συνάρτηση $F(x)=\int_\alpha^x f(t)dt-\lambda\int_\alpha^\beta f(x)dx$, $x\in[\alpha,\beta]$ και να εφαρμόσετε το θ. Bolzano.

2.21. α) $\frac{49}{6}$. Να παρατηρήσετε ότι $x^2-x-2>0$ αν $x<-1$ και $x>2$ και $x^2-x-2<0$ αν $-1\le x\le 2$.

β) $\sqrt{3}+\frac{\pi}{6}$ γ) $\frac{\pi^2}{4}-2$ δ) $4\sqrt{2}$ ε) $-\frac{5}{8}+\log\frac{3}{2}$ στ) $\log\frac{3}{4}$

2.22. Να διακρίνετε τις περιπτώσεις: α) $\alpha<\beta\le 0$ β) $\alpha<0\le\beta$ και γ) $0\le\alpha<\beta$

2.23. Να εφαρμόσετε το θεώρημα 2.14.

2.24. $\varphi(x)=(x+1)^2$, εφαρμογή 2 της §2.6.

2.25. Αν $F(x)=\int_0^x f(t)dt$, τότε $F'(x)=f(x)=-f(x)$, οπότε $F'(x)=0$, $\forall x\in[0,1]$.

2.26. Να πάρετε την διαφορά $F(x_1)-F(x_2)$ και να εφαρμόσετε το θεώρημα 2.14. Για το δεύτερο να εφαρμόσετε στην F το θεώρημα 2.18.

2.27. α) $\frac{4\pi}{3}+\sqrt{3}$. Να θέσετε $x=2\sin t$ β) $\frac{\sqrt{3}}{32}$ γ) $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$

δ) $2-\frac{2}{\sqrt{3}}+\log\frac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}$

2.28. α) $\frac{2}{\alpha^2+4}(e^{\pi\alpha/2}+1)$ β) $\pi\sqrt{2}-4$ γ) $\log 2-\frac{1}{2}$ δ) $\frac{16\pi}{3}-2\sqrt{3}$

2.29. α) Να εφαρμόσετε παραγοντική ολοκλήρωση

β) Να θέσετε $x=\omega-\frac{\pi}{2}$, οπότε $I=e^{\pi/2}I_3=\frac{3}{10}e^{\pi/2}(1+e^{-\pi})$

2.30. Στα α), β) και γ) να εφαρμόσετε παραγοντική ολοκλήρωση. Στο δ) να λάβετε υπόψη την ταυτότητα: $\sin(2\nu+1)x-\sin(2\nu-1)x=2\cos 2\nu x\cdot\sin x$.

2.31. Να αποδείξετε ότι $\int_\alpha^\beta f(x)dx=(\beta-\alpha)\int_0^1 f\{(\beta-\alpha)t+\alpha\}dt$

2.32. Μια απ' ευθείας εφαρμογή της αντικατάστασης οδηγεί σε λάθος συμπέρασμα, γιατί η αντίστροφη της $x=\varphi(t)$ είναι η $x=2\pm\sqrt{t}$. Να γράψετε το ολοκλήρωμα $I=\int_0^2(x-2)^2dx+\int_2^3(x-2)^2dx$

2.33. Η $tg\frac{x}{2}$ δεν ορίζεται στο π.

2.34. $\int_0^1 f(\mathrm{Arsin}t)dt+\int_1^{-1} f(\pi-\mathrm{Arsin}t)dt+\int_{-1}^0 f(2\pi+\mathrm{Arsin}t)dt$. Να γράψετε το ολοκλήρωμα σαν άθροισμα τριών ολοκληρωμάτων στα διαστήματα $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$

2.35. Να θέσετε $u=\frac{1}{t}$

2.36. α) Να θέσετε $u=\frac{1}{t}$ β) $f(xy)=\int_1^{xy}\frac{dt}{t}=\int_1^x\frac{dt}{t}+\int_x^{xy}\frac{dt}{t}$. Στο β' να θέσετε $t=xu$ γ) Να θέσετε $t=u^y$

2.37. α) Να θέσετε $t=\pi-x$ β) $\frac{\pi^2}{2}-\pi$

2.38. α) $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx=\int_{-\alpha}^0 f(x)dx+\int_0^{\alpha} f(x)dx$. Στο α' να θέσετε $x=-t$

β) Να εφαρμόσετε το α)

2.39. $\int_\alpha^{\alpha+T} f(x)dx=\int_\alpha^0 f(x)dx+\int_0^T f(x)dx+\int_T^{\alpha+T} f(x)dx$. Στο τελευταίο να θέσετε $x=t+T$. Αν η f είναι συνεχής, να αποδείξετε ότι η παράγωγος ως προς α είναι μηδέν.

2.40. α) Να θέσετε $t=\alpha+\beta-x$

β) $\int_0^\alpha\{f(x)+f(2\alpha-x)\}dx=\int_0^\alpha f(x)dx+\int_0^\alpha f(2\alpha-x)dx$. Στο τελευταίο να θέσετε $t=2\alpha-x$

γ) Στο δεύτερο να θέσετε $t=\frac{1}{\omega}$

δ) Στο πρώτο να θέσετε $\mathrm{Arsin}\sqrt{t}=\omega$, στο δεύτερο $\mathrm{Arcos}\sqrt{t}=\omega$ και να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα που θα προκύψει.

2.41. $\int_\beta^{2\alpha} f(x)dx=\int_\beta^\alpha f(x)dx+\int_\alpha^{2\alpha} f(x)dx$. Στο δεύτερο να θέσετε $x=2\alpha-t$

2.42. $\int_{\sqrt{2}}^s\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=-\int_{\sqrt{2}}^s\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}d\frac{1}{x}=-\mathrm{Arsin}\frac{1}{s}+\frac{\pi}{4}$. Τελικά $s=2$

2.43. α) $tg^{\nu+1}x<tg^\nu x$, $0<x<\frac{\pi}{4}$

β) $f(\nu)=\int_0^{\pi/4}tg^{\nu-2}x\frac{1-\cos^2x}{\cos^2x}dx=\int_0^{\pi/4}tg^{\nu-2}x\,d\,tgx-f(\nu-2)=\frac{1}{\nu-1}-f(\nu-2)$

γ) $\frac{1}{\nu-1}<2f(\nu-2)$, $\frac{1}{2\nu+2}<f(\nu)$, $\frac{1}{\nu-1}>2f(\nu)$, $\frac{1}{2\nu-2}>f(\nu)$

2.44. Να εφαρμόσετε το Θεώρημα 2.23.

2.45. Να εργαστείτε όπως στην εφαρμογή 1 της §2.8.

2.46. Να εφαρμόσετε το Θεώρημα 2.23. Μετά ολοκληρώνοντας θα έχετε $\theta(x)=$ $=\dfrac{x-\log(1+x)}{x\log(1+x)}$. Να εφαρμόσετε τον κανόνα του L'Hospital.

2.47. Όχι, αφού η f δεν είναι μονότονη.

2.49. Να εφαρμόσετε το Πόρισμα του Θεωρήματος 2.23, $\xi=\frac{\pi}{3}$

2.50. Να εργαστείτε όπως στο Παράδειγμα 2.20.

2.51. α) Με επαγωγή να αποδείξετε ότι $f_\nu(x)$ αύξουσα $\forall \nu \geq 1$.

$$f_{\nu+1}(x)=\int_0^x f_\nu(t)dt < \int_0^x f_\nu(x)dt=xf_\nu(x)$$

β) $\displaystyle\int_0^x (x-u)^{\nu-k} f_{k-1}(u)du=\int_0^x (x-u)^{\nu-k} f'_k(u)du=$

$$\{(x-u)^{\nu-k} f_k(u)\}_0^x+(\nu-k)\int_0^x (x-u)^{\nu-k-1} f_k(u)du$$

και ο πρώτος παράγοντας είναι μηδέν για $k \geq 1$.

2.52. α) $\sqrt{2}-2\log\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ β) άσκηση 2.21 α).

γ) $\frac{4}{3}$ (Είναι $1-3y^2 \geq -2y^2$, $-1 \leq y \leq 1$)

δ) $4\sqrt{2}$ $\left(\text{Σημεία τομής } \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ και } \left(\frac{5\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$

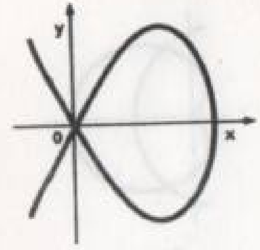
ε) $\alpha^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}\right)$ στ) $\frac{1}{3}\alpha^2$

ζ) 9 η) $\frac{9}{2}$

2.53. $E=\displaystyle\int_0^\alpha\left(\sqrt{2\alpha x}-\frac{x^2}{2\alpha}\right)dx+\int_\alpha^{\alpha\sqrt{3}}\left(\sqrt{3\alpha^2-x^2}-\frac{x^2}{2\alpha}\right)dx=\alpha^2\left(\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{3}{2}\text{Arsin}\,\frac{1}{3}\right)$

2.54. $2\pi-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\log(2+\sqrt{3})$

2.55.



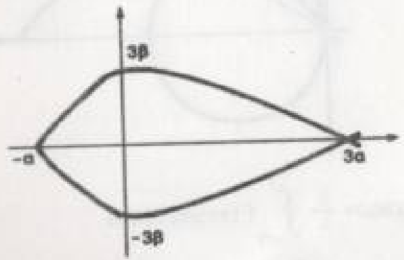
$$E=2\int_0^1 ydx=4\int_0^1 x\sqrt{1-x}dx=\frac{16}{15}$$

2.56. Να εργαστείτε όπως στην εφαρμογή 2 της § 2.10 α)

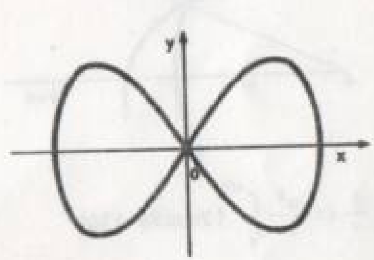
2.57. Είναι $f(x) \geq 0$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{\beta}$ και $f(x) \leq 0$, $\frac{\pi}{\beta} \leq x \leq \frac{2\pi}{\beta}$

2.58. $\pi\alpha^2+2\beta^2\text{Arcosh}\,\dfrac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\beta\sqrt{2}}-\alpha^2\pi+2\alpha^2\text{Arsin}\,\dfrac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\alpha\sqrt{2}}$

2.59. α)



β)

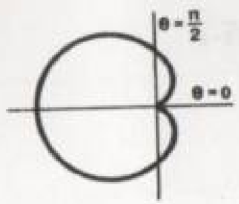


$E=\frac{256}{15}\alpha\beta$ $E=\frac{8}{3}\alpha\beta$

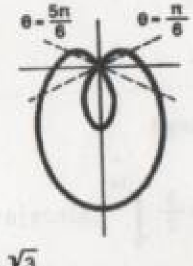
γ) $\frac{8\sqrt{3}}{5}$ δ) $\frac{8}{15}$

ε) $\frac{3\pi}{4}$ στ) π

2.60. α)

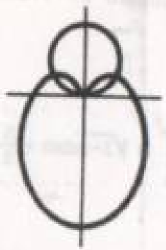


β)

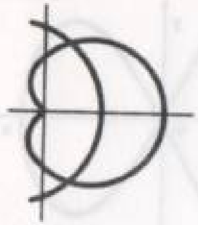


$E=\frac{3\pi}{2}$ $E=\frac{2\pi-3\sqrt{3}}{2}$

γ)



δ)

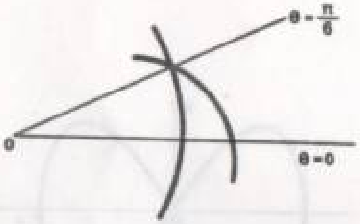


$E=2\left\{\int_0^{\pi/6}\frac{1}{2}\sin^2\theta d\theta+\int_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{1}{2}(1-\sin\theta)^2 d\theta\right\}$

$=\frac{7\pi}{12}-\sqrt{3}$

$E=\frac{8+\pi}{4}$

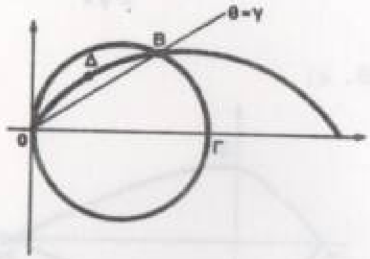
ε)



$\frac{1}{4}E=\frac{a^2}{2}\int_0^{\pi/6}(2\cos 2\theta-1)d\theta$

$E=2a^2\left[\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}\right]$

στ)



$O\Gamma B\Delta O=\frac{1}{4}\int_{-\pi/2}^{\gamma}(1+\cos 2\theta)d\theta+$

$\int_{\gamma}^{\pi/2}(2-4\sin\theta+1-\cos 2\theta)d\theta$

$=\frac{13\pi}{8}-\frac{11}{4}\operatorname{Arsin}\frac{3}{5}-\frac{13}{5}$

ζ) 4π

η) π

2.61. α) $\frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1)$

β) $\log tg\frac{3\pi}{8}$

γ) $\frac{3}{2}$

δ) $\sqrt{3}-1$

ε) $a\log 3$

2.62. α) $s=\frac{3}{2}\int_0^{2\pi}|\sin 2t|dt=4\cdot\frac{3}{2}\int_0^{\pi/2}\sin 2t dt=6$

β) $8a$ γ) $16a$ δ) $2a\pi^2$

ε) $\frac{1}{3}\pi^3$ στ) $2(e^{\pi}-1)$ ζ) $2\log\frac{5}{4}$

η) $8a$ θ) $\frac{3}{2}\pi a$

2.63. $x=a\operatorname{Arsinh}\frac{s}{a}$, $y=\sqrt{a^2+s^2}$

2.64. $s=\int_0^{x}\cosh\frac{x}{a}dx=\frac{1}{a}\left\{\int_0^{x}a\cosh\frac{x}{a}dx\right\}=\frac{1}{a}\cdot E$

2.65. α) $2\pi(\sqrt{2}+\log(1+\sqrt{2}))$ β) $\frac{56}{3}\pi a^2$ γ) $\frac{24}{5}\pi a^2$

δ) $\frac{64}{3}\pi a^2$ ε) $\frac{2\pi\sqrt{2}}{5}(e^{\pi}-2)$ στ) $\frac{32}{5}\pi a^2$

2.66. α) $\frac{\pi}{3}(\log 2)^3$ β) $\frac{\pi}{2}\log\frac{12}{5}$ γ) $5\pi^2a^3$ δ) $\frac{\pi}{6}$

2.67. $B=2\pi\int_0^{x}a\cosh\frac{x}{a}\sqrt{1+\sinh^2\frac{x}{a}}dx=\frac{2}{a}\left\{\pi a^2\int_0^{x}\cosh^2\frac{x}{a}dx\right\}=\frac{2V}{a}$

2.68. $2\pi a\beta\left(\sqrt{1-k^2}+\frac{1}{k}\operatorname{Arsin}k\right)$, $k=\frac{1}{a}\sqrt{a^2-\beta^2}$

Σωστό ή λάθος;

1) Σ	2) Σ	3) Σ	4) Λ, $f(x)=\sqrt{x}, x\in[0,\infty)$	
5) Σ	6) Σ	7) Σ	8) Σ	9) Σ
10) Σ	11) Σ	12) Λ	13) Λ, $F(a)-F(0)$	

14) Λ, η g δεν είναι σταθερού προσήμου

15) Λ 16) Σ 17) Λ, $E=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin^2\theta d\theta$

2.69. α) Το sin είναι γνήσια αύξουσα συνάρτηση στο $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$

β) $4-x^2<4-x^2+x^3<4$, $\forall x\in[0,1]$.

2.70. Να εφαρμόσετε το Θεώρημα 2.14 αφού πρώτα κάνετε μια παραγοντική ολοκλήρωση.

2.71. Να εργαστείτε όπως προηγούμενα.

2.72. Να θέσετε $t=\alpha+\beta-x$

2.73. α) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα με παραγοντική ολοκλήρωση.

β) Να αποδείξετε ότι $\int_0^{\nu T} f(x)dx=\nu\int_0^T f(x)dx$, αν f περιοδική με περίοδο T και μετά να κάνετε εφαρμογή.

2.74. $\left(\int_\alpha^\beta \frac{1}{s}\,dx\right)^2 \leqslant \int_\alpha^\beta ds \int_\alpha^\beta \frac{1}{s^2}\,ds$

2.75. Να παραγωγίσετε και τα δυο μέλη και μετά να ολοκληρώσετε. Θα βρείτε $f(x)=\log\sqrt{\frac{3}{2+\cos x}}$

2.76. Είναι $G(0)=0$ και $G(1)=\frac{1}{2}\alpha$. Να λάβετε υπόψη την εφαρμογή 2 της §1.7

2.77. Να εφαρμόσετε το Θεώρημα του Bolzano στην συνάρτηση $F(x)=2x-\int_0^x f(t)dt-1$

2.78. Αφού f συνεχής και $f(\beta)=-1$ θα είναι $f(x)<0$, $\forall x\in[\beta-\varepsilon,\beta]$ για $\varepsilon>0$. Αλλά $\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_\alpha^{\beta-\varepsilon} f(x)dx+\int_{\beta-\varepsilon}^\beta f(x)dx$. Συνεπώς $\int_\alpha^{\beta-\varepsilon} f(x)dx>0$. Επομένως υπάρχει $x_1\in(\alpha,\beta-\varepsilon)$ τέτοιο ώστε $f(x_1)>0$. Τότε όμως, αφού $f(\beta)<0$, θα υπάρχει $x_2\in(x_1,\beta)$ τέτοιο ώστε: $f(x_2)=0$. Από το Θεώρημα του Rolle θα υπάρχει τότε $\xi\in(\alpha,x_2)$ τέτοιο ώστε: $f'(\xi)=0$.

2.79. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα.

2.80. Να αποδείξετε ότι: $(F(x)-\varphi(x)G(x))'\leqslant 0$

2.81. Είναι $\sin x\geqslant\frac{2x}{\pi}$, $\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Άρα $e^{-k\sin x}<e^{-(2k/\pi)x}$

2.82. Να αποδείξετε ότι το ολοκλήρωμα ισούται με $-1-x$ αν $-1\leqslant x<0$ και $-1+x$ αν $x>0$

2.83. Είναι:

$$F(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{2}, & 0<x\leqslant 1\\[2ex] \frac{x^2}{2}+x-1, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$$

2.84. Να εφαρμόσετε τον Ορισμό σε συνδυασμό με το Θ. 2.23

2.85. Να εφαρμόσετε την ανισότητα των Cauchy-Schwarz με $f(x)=1$ και $g(x)=\sqrt{1-k^2\sin^2 x}$

2.86. α) $I_\nu=\int_0^{2a} x^{\nu+3}d\left\{-\frac{\sqrt{(2ax-x^2)^3}}{3ax^3}\right\}$

β) Να θέσετε στον αναγωγικό τύπο $\nu=1,2,\ldots,\nu$ και να πολλαπλασιάσετε κατά μέλη τις σχέσεις που θα προκύψουν.

2.87. Να θέσετε πρώτα $x=\pi-t$ και μετά $\mathrm{tg}\,t=\omega$

2.88. $(f^{-1}(0))'=\frac{1}{f'(f^{-1}(0))}=1$

2.89. $f'(x)=\frac{1}{1+\sin^2\left(\int_0^x\frac{1}{1+\sin^2 t}\,dt\right)}\cdot\frac{1}{1+\sin^2 t}$

2.90. Να εργαστείτε όπως στην εφαρμογή 2 της §2.10 α)

2.91. α) 4 β) $4\sqrt{3}$

2.92. α) $1+\frac{1}{2}\log\frac{3}{2}$ β) $\log\mathrm{tg}\frac{3\pi}{8}$ γ) $\frac{\alpha}{2}\{\sqrt{2}+\log(1+\sqrt{2})\}$

2.93. $\lambda=2\pi$

2.94. $E=\int_{-\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha^2+1}}}^{\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha^2+1}}}\left(1-\frac{x^2}{\alpha}-\alpha x^2\right)dx$. Μέγιστη τιμή $\frac{4}{3\sqrt{2}}$ για $\alpha=1$

2.96. Να θέσετε $2x=u$, να χωρίσετε σε απλά κλάσματα, να θέσετε $u=\pi-\upsilon$ σε να και να αλλάξετε την μεταβλητή σε x και στα δύο.

Κεφάλαιο 3

3.1. $p>0$

3.2. α) Συγκλίνει στο $(p-1)^{-1}(\log 2)^{1-p}$

β) Αποκλίνει

γ) $\frac{\pi}{2}$

δ) Απειρίζεται αρνητικά

ε) Απειρίζεται αρνητικά

στ) Συγκλίνει στο $\frac{2}{\alpha}\cdot\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|x|}dx=\int_{-\infty}^{0} e^{\alpha x}dx+\int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha x}dx\right)$

ζ) Συγκλίνει στο $\frac{\pi}{2}$

η) Συγκλίνει στο $\sqrt{3}\pi$ (Να θέσετε $e^{x/3}=t$)

3.4. α) 2 β) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

3.5. α) $\frac{1}{e}$, $\frac{\pi}{2e^2}$ β) $+\infty$, π γ) $1, \frac{\pi}{3}$

3.6. Δεν υπάρχουν γ) και δ). Οι υπόλοιπες υπάρχουν.

3.7. α) Να εργαστείτε όπως στο Παράδειγμα 3.8.
β) Συγκλίνει, θεώρημα 3.3.
γ) Να εργαστείτε όπως στην εφαρμογή 3 της § 3.3.

3.8. α) Να θέσετε $x=-y$. Τότε $\frac{e^{-y}}{y}\leq e^{-y}, \forall y\geq 1$

β) $\frac{1}{x}<\frac{1}{\sqrt{x^2-2}}, \forall x\in[3,+\infty)$

γ) $\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}\leq\frac{1}{x^2}, \forall x\geq 1$

δ) Συγκλίνει
ε) Απειρίζεται θετικά
στ) Συγκλίνει

3.9. α) Συγκλίνει, $\lim_{x\to+\infty} x^{3/2}\,\frac{\log x}{x^2}=0$

β) Συγκλίνει, θεώρημα 3.6 με $g(x)=\frac{1}{1+x^2}$

γ) $(x^3+2x)^{1/2}\geq x^{3/2}$

δ) $x^4-1>\frac{1}{2}x^4$ για $x\geq 2$

ε) Συγκλίνει
στ) Συγκλίνει

3.10. α) Εφαρμογή 2 της § 3.3 με $f(x)=x^{\nu}$, $\beta=\frac{1}{2}\alpha$

β) Εφαρμογή 2 της § 3.3 με $f(x)=\sinh\nu x$, $\beta=\frac{1}{2}(\alpha+\nu)$

γ) $0\leq x^{\nu}\log(1+x)\leq x^{\nu+1}$

δ) Να παρατηρήσετε ότι $t^{\beta}e^{-\alpha t/2}\to 0$ όταν $t\to+\infty$.

3.11. $p>-1$

3.12. α) $p+q>1$ β) $p<2q-1$

3.13. Εφαρμογή 4 της § 3.3.

3.14. Να θέσετε $x=\alpha\,\mathrm{tg}\,\omega$ και να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα.

3.15. $I_0-I_2=\int_0^1\frac{1-x^2}{1+x^4}dx+\int_1^{+\infty}\frac{1-x^2}{1+x^4}dx$. Στο δεύτερο να θέσετε $x=\frac{1}{y}$. $I_0+I_2-\sqrt{2}I=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+\sqrt{2}x+x^2}$

3.16. Τα α) και β) συγκλίνουν υπό συνθήκη. Τα υπόλοιπα συγκλίνουν απόλυτα.

3.17. α) i) $p>1$ ii) $0<p\leq 1$

β) i) $p>1$ ii) $p\leq 1$

3.18. Να εφαρμόσετε παραγοντική ολοκλήρωση.

3.19. Συγκλίνει

3.20. Να εφαρμόσετε την Παρατήρηση 3.11 με $f(x)=\frac{1}{x}$

3.21. α) Συγκλίνει

β) Συγκλίνει αν $p>1$

γ) Απειρίζεται θετικά

δ) Συγκλίνει

ε) Να εφαρμόσετε το κριτήριο της Παρατήρησης 3.14

στ) $\int_0^{1/\nu} x^{1/3}(1+x)dx < 2\int_0^{1/\nu} x^{1/3}dx = \frac{3}{2}\nu^{-4/3}$

ζ) $\int_0^{1/\nu} \frac{x^{2/3}}{1+x^3}dx < \int_0^{1/\nu} x^{2/3}dx = \frac{3}{5}\nu^{-5/3}$

3.22. $\int_0^{+\infty} t^3 e^{-t}dt < +\infty$

3.23. α) Συγκλίνει

β) Συγκλίνει στο $\frac{\pi}{2}+\log(2\sqrt{3})$ (Δεν ορίζεται στο 1)

γ) Συγκλίνει

δ) Απειρίζεται θετικά

3.24. Να θέσετε $x=\sin t$

3.27. α) Συγκλίνει, $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{3/4}f(x)=0$

β) Συγκλίνει. $\left(\text{Να θέσετε } \frac{1}{x}=t\right)$

γ) Συγκλίνει, $\lim\limits_{x\to 1^-}(1-x)^p \frac{\log x}{x+1}=0,\ 0<p<1$

δ) Απειρίζεται θετικά

3.28. α) $p<1$

β) $0<p<2$

γ) Συγκλίνει απόλυτα αν $p>-1$ και υπό συνθήκη αν $-2<p\leq -1$

3.30. α)-δ) Να λάβετε υπόψη την εφαρμογή 2 της §3.7

ε) Να θέσετε $x=e^{-y^2}$

3.32. α) Απειρίζεται θετικά

β) Απειρίζεται θετικά

γ) Απειρίζεται θετικά για όλες τις τιμές του p.

δ) Συγκλίνει

3.33. Όχι' να διακρίνετε τις περιπτώσεις $p<-1$, $p=-1$, $p>-1$

3.34. Να εφαρμόσετε το κριτήριο συγκρίσεως.

3.35. Ναι

3.36. α) Να θέσετε $t=\log\frac{1}{x}$

β) Να θέσετε $t=x^2$

Σωστό ή λάθος;

1) Σ 2) Λ, $p>1$ 3) Λ, $f(x)=\frac{1}{x+1}$ 4) Σ 5) Λ, δεν ορίζεται στο $\pi/2$ 6) Λ, δεν ορίζεται στο 0 7) Λ, δεν ορίζεται στο 1 8) Λ, $\varphi(x)=\begin{cases} 1, & 2\nu\pi \leq x \leq (2\nu+1)\pi \\ -1, & (2\nu+1)\pi < x < (2\nu+2)\pi \end{cases}$

και $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\varphi(x)dx = \int_0^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x}dx = +\infty$

3.37. Να εφαρμόσετε παραγοντική ολοκλήρωση

3.38. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{2+\nu}}{e^{x^2}}=0$. Για το δεύτερο να εφαρμόσετε παραγοντική ολοκλήρωση.

3.39. $A=1$, $B=1/2$. Να ολοκληρώσετε από 0 μέχρι k και να παρατηρήσετε ότι:

$$\frac{1}{3}\{(k^2+1)^{3/2}-(Ak^3+3Bk)\}=\frac{1}{3}\,\frac{(1-A^2)k^6+(3-6AB)k^4+(3-9B^2)k^2+1}{(k^2+1)^{3/2}+Ak^3+3Bk}$$

3.40. Να θέσετε $\log x=\omega$

3.41. Να εφαρμόσετε παραγοντική ολοκλήρωση.

3.42. $B=\pi\{\sqrt{2}+\log(1+\sqrt{2})\}$

3.43. α) $p>1$ β) $0<p<1$ γ) $-1<p<0$ και $p\geq 0$

3.44. Να θέσετε $x^q=t$ και να γράψετε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{+\infty}x^p\sin(x^q)dx=\int_0^1\frac{\sin t}{t^a}dt+\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t^a}dt,\quad a=1-\frac{p+1}{q}$$ και να αποδείξετε

3.45. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p \log^q x} = \int_1^{a} \frac{dx}{x^p \log^q x} + \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p \log^q x}$. Να εφαρμόσετε το κριτήριο συγκρίσεως.

3.46. $\lim\limits_{x \to 0+} x^p f(x)=1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{p+q} f(x)=1$

3.47. α) Συγκλίνει αν $\alpha < 3$, αφού $\int_0^{+\infty} x^{\alpha}\cos(x^4)dx = \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} t^{\frac{\alpha-3}{4}} \cos t dt$

β) i) $\alpha \geq 0 \Rightarrow x^{\alpha} \geq 1 \Rightarrow \frac{x^{\alpha}}{1+x^{\alpha}} \geq \frac{1}{2}$

ii) $-1 \leq \alpha \leq 0 \Rightarrow \frac{x^{\alpha}}{1+x^{\alpha}} = \frac{1}{1+x^{-\alpha}}$, $x \geq 1 \Rightarrow 2x^{-\alpha} \geq 1+x^{-\alpha} \Rightarrow \frac{1}{1+x^{-\alpha}} \geq \frac{1}{2x^{-\alpha}}$

iii) $\alpha < -1 \Rightarrow \frac{1}{1+x^{-\alpha}} \leq \frac{1}{x^{-\alpha}}$

3.48. $p > -1$, $q > -1$

3.49. Να θέσετε $x = tg\omega$

3.50. $\int_0^{+\infty} \varphi(x)dx = \int_0^1 \varphi(x)dx + \int_1^{+\infty} \varphi(x)dx$. Στο τελευταίο να θέσετε $x = \frac{1}{t}$

3.51. Να θέσετε $x = \sin\theta$ και να λάβετε υπόψη την εφαρμογή 2 της § 3.7.

3.52. $f(0) = 2\int_0^{+\infty} (1+s)^{-2} ds = 2$. Για το δεύτερο να χρησιμοποιήσετε την ανισότητα των Cauchy-Swartz.

3.53. Για το δεύτερο, να το αναγάγετε στο πρώτο, θέτοντας $x = e^{\theta}$, $A = e^{\alpha}$, $B = e^{\beta}$.

Κεφάλαιο 4

4.1. Να εφαρμόσετε τον ορισμό.

4.2. $\lim\limits_{t \to +\infty} (e^{-\alpha t} t^x) = 0$, από τον κανόνα του L'Hospital.

4.3. και 4.4. Να εξετάσετε αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος 4.1.

4.5. α) $\frac{c}{s}$ β) $\frac{2}{s^2+4}(1-e^{-s\pi})$

4.6. Βλέπε Παρατήρηση 4.3.

4.7. α) $\frac{\Gamma(\nu+1)}{(s-\alpha)^{\nu+1}}$ β) $\frac{s}{s^2+\alpha^2}$

γ) $\frac{\omega}{(s-\alpha)^2+\omega^2}$ δ) $\frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\omega^2}$

ε) $\frac{s}{s^2-1}$ στ) $\frac{\alpha}{s^2-\alpha^2}$

ζ) $\frac{s}{s^2-\alpha^2}$ η) $4\frac{s^2+2\alpha^2}{s(s^2+4\alpha^2)}$

4.8. α) $\frac{s^2-2s+4}{s(s^2+4)}$ β) $\frac{1}{s+2} - \frac{s}{s^2+4}$

γ) $\frac{1-5s}{s^2+2s-3}$ δ) $\frac{20-4s}{s^2-4s+20}$

ε) $\frac{s^3}{s^4+4\alpha^4}$ στ) $\frac{s}{s^4+4\alpha^4}$

4.9. Να εργαστείτε όπως στο Παράδειγμα 4.16.

4.10. α) $\frac{s}{s^2+1} e^{-2\pi s/3}$

β) $\frac{2}{s^3} e^{-s}$

γ) $\frac{2}{s^3} - \frac{2e^{-2s}}{s^3} - \frac{4e^{-2s}}{s^2} + \frac{2e^{-2s}}{s}$

δ) $\frac{2}{s^3} - e^{-2s}\left(\frac{3}{s} + \frac{3}{s^2} + \frac{2}{s^3}\right) + e^{-3s}\left(\frac{5}{s} - \frac{1}{s^2}\right)$

4.11. $\frac{2}{s}(1-e^{-s})$

4.12. α) $\frac{1}{(s^2+\alpha^2)^2}$ β) $\frac{s}{(s^2+\alpha^2)^2}$

γ) $\frac{s}{(s^2-\alpha^2)^2}$ δ) $\frac{s^2}{(s^2-\alpha^2)^2}$

ε) $\frac{3s^2-\alpha^2}{(s^2+\alpha^2)^3}$ στ) $\frac{s^3-3\alpha^2 s}{(s^2+\alpha^2)^3}$ ζ) $\frac{1}{(s^2+\alpha^2)^3}$

4.13. Να εφαρμόσετε τα θεωρήματα 4.3 και 4.5.

4.14. Να εργαστείτε όπως στο Παράδειγμα 4.20.

4.15. $\frac{1}{s^2}\left(2s-1+\text{Artg}\,\frac{1}{s}\right)$

4.16. $\frac{3}{25}$

4.17. α) $\frac{1}{(1-e^{-\pi s})(s^2+1)}$

β) $\frac{1}{s^2}\,\text{tgh}\,\frac{cs}{2}$

γ) $\frac{2-2e^{-2s}-4se^{-2s}-4s^2e^{-2s}}{s^3(1-e^{-2s})}$

δ) $\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\;\frac{1}{1-e^{-s\pi/\omega}}$

4.18. α) $\frac{1}{s^2}-\frac{e^{-s}}{s(1-e^{-s})}$

β) $\frac{1}{s^2}\,\text{Artgh}\,\frac{s}{2}$

γ) $\frac{1}{s}e^{-\alpha s}$

4.19. Να παρατηρήσετε ότι: $f(x+2T)=f[(x+T)+T]=-f(x+T)=f(x)$

4.20. Να εργαστείτε όπως στα παραδείγματα 4.23-4.25.

4.21. α) $6e^{2t}\cos 4t+2e^{2t}\sin 4t$

β) $\frac{1}{3}e^{-t}(\sin t+\sin 2t)$

γ) $3\cos 2t-4\sin 2t-4\cosh 4t+6\sinh 4t$

δ) $e^{-2t}(1-4t+2t^2)$

ε) $\frac{1}{\sqrt{3}}\,e^{-\frac{1}{2}(t-\pi)}\left[\sqrt{3}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}(t-\pi)+\sin\frac{\sqrt{3}}{2}(t-\pi)\right]$

αν $t>\pi$ και 0 αν $t<\pi$

στ) $\frac{t^2}{2}+\cos t-1$

4.26. α) $\frac{5}{2}e^{-3t}-\frac{3}{2}e^{-t}$

β) $2\cos t-1$

γ) $(2t-1)e^{t}+1$

δ) $4e^{-4t}-4te^{-4t}$

ε) $\frac{1}{2}(e^{t}-\cos t-\sin t)$

στ) $\frac{1}{5}e^{-t}(4\cos t-3\sin t)-\frac{4}{5}e^{-3t}$

② ΧΡΗΣΙΜΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ

Α΄. Ειδικές τιμές των τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Ακτίνια	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
Μοίρες	0	30	45	60	90	120	135	150	180	210	225	240	270	300	315	330	360
sinα	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
cosα	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tgα	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
ctgα	$\pm\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\pm\infty$

Β΄. Σχέσεις μεταξύ τριγωνομετρικών αριθμών

	$-\alpha$	$90\pm\alpha$	$180\pm\alpha$	$270\pm\alpha$	$\nu\cdot 360\pm\alpha$
sin	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$
cos	$\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$\cos\alpha$
tg	$-\mathrm{tg}\alpha$	$\mp\mathrm{ctg}\alpha$	$\pm\mathrm{tg}\alpha$	$\mp\mathrm{ctg}\alpha$	$\pm\mathrm{tg}\alpha$
ctg	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$\mp\mathrm{tg}\alpha$	$\pm\mathrm{ctg}\alpha$	$\mp\mathrm{tg}\alpha$	$\pm\mathrm{ctg}\alpha$

Γ΄. Βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$

$\mathrm{tg}(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\mathrm{tg}\alpha\pm\mathrm{tg}\beta}{1\mp\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta}$

$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$

$\sin\alpha\pm\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha\mp\beta}{2}$

$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

$1+\cos\alpha=2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$, $1-\cos\alpha=2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$

$2\cos\alpha\cdot\cos\beta=\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$

$2\sin\alpha\cdot\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)$

$2\sin\alpha\cdot\cos\beta=\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$

$\sin(\nu+1)\alpha=2\sin(\nu\alpha)\cos\alpha-\sin(\nu-1)\alpha$

$\cos(\nu+1)\alpha=2\cos(\nu\alpha)\cos\alpha-\cos(\nu-1)\alpha$

Δ΄. Μερικές χρήσιμες ανισότητες

1. $\sin x\leq x\leq \mathrm{tg}x,\ 0\leq x\leq\frac{\pi}{2}$
2. $\sin x>\frac{2x}{\pi},\ -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$
3. $\cos x\leq\frac{\sin x}{x}\leq1,\ 0\leq x\leq\pi$
4. $e^x>1+x,\ x\in\mathbb{R}$
5. $e^x<\frac{x}{1-x},\ x<1$
6. $e^{-\frac{x}{1-x}}<1-x<e^{-x},\ x<1$
7. $x<e^x-1<\frac{x}{1-x},\ x<1$
8. $\frac{x}{1+x}<1-e^{-x}<x,\ x>-1$
9. $\frac{x}{1+x}<\log(1+x)<x,\ -1<x\neq0$
10. $x<-\log(1-x)<\frac{x}{1-x},\ 0\neq x<1$

Ε'. ΠΙΝΑΚΑΣ ΑΟΡΙΣΤΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ

Ολοκληρώματα που περιέχουν $\alpha x+\beta$ και $\gamma x+\delta$

1 $$\int \frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\,dx=\frac{\alpha}{\gamma}x+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2}\log|\gamma x+\delta|$$

2 $$\int \frac{dx}{(\alpha x+\beta)(\gamma x+\delta)}=\frac{1}{\beta\gamma-\alpha\delta}\log\left|\frac{\gamma x+\delta}{\alpha x+\beta}\right|,\quad \beta\gamma-\alpha\delta\neq 0$$

Ολοκληρώματα που περιέχουν $\alpha x^2+\beta x+\gamma,\ \alpha\neq 0$

3 $$\int \frac{1}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}\,dx=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}\log\left|\dfrac{2\alpha x+\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha x+\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}\right|, & \beta^2>4\alpha\gamma\\[2ex] \dfrac{2}{\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2}}\operatorname{Artg}\dfrac{2\alpha x+\beta}{\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2}}, & \beta^2<4\alpha\gamma\\[2ex] -\dfrac{2}{2\alpha x+\beta}, & \beta^2=4\alpha\gamma\end{cases}$$

Ολοκληρώματα που περιέχουν $\alpha^2\pm x^2$

4 $$\int \frac{dx}{\alpha^2+x^2}=\frac{1}{\alpha}\operatorname{Artg}\frac{x}{\alpha}$$

5 $$\int \frac{dx}{\alpha^2-x^2}=\frac{1}{2\alpha}\log\left|\frac{x+\alpha}{\alpha-x}\right|$$

6 $$\int \frac{dx}{(\alpha^2\pm x^2)^{\nu}}=\frac{1}{2\alpha^2(\nu-1)}\left\{\frac{x}{(\alpha^2\pm x^2)^{\nu-1}}+(2\nu-3)\int\frac{dx}{(\alpha^2\pm x^2)^{\nu-1}}\right\},\quad \nu\neq 1$$

Ολοκληρώματα που περιέχουν $\alpha^3\pm x^3$ ή $\alpha^4\pm x^4$

7 $$\int \frac{dx}{\alpha^3\pm x^3}=\pm\frac{1}{6\alpha^2}\log\left|\frac{(\alpha\pm x)^2}{\alpha^2\mp\alpha x+x^2}\right|+\frac{1}{\alpha^2\sqrt{3}}\operatorname{Artg}\frac{2x\mp\alpha}{\alpha\sqrt{3}}$$

8 $$\int \frac{dx}{(\alpha^3\pm x^3)^2}=\frac{x}{3\alpha^3(\alpha^3\pm x^3)}+\frac{2}{3\alpha^3}\int\frac{dx}{\alpha^3\pm x^3}$$

9 $$\int \frac{dx}{\alpha^4+x^4}=\frac{1}{4\alpha^3\sqrt{2}}\log\left|\frac{x^2+\alpha x\sqrt{2}+\alpha^2}{x^2-\alpha x\sqrt{2}+\alpha^2}\right|+\frac{1}{2\alpha^3\sqrt{2}}\operatorname{Artg}\frac{\alpha x\sqrt{2}}{\alpha^2-x^2}$$

10 $$\int \frac{dx}{\alpha^4-x^4}=\frac{1}{4\alpha^3}\log\left|\frac{\alpha+x}{\alpha-x}\right|+\frac{1}{2\alpha^3}\operatorname{Artg}\frac{x}{\alpha}$$

Ολοκληρώματα που περιέχουν $\sqrt{\alpha x+\beta}$

11 $$\int \sqrt{\alpha x+\beta}\,dx=\frac{2}{3\alpha}\sqrt{(\alpha x+\beta)^3}$$

12 $$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha x+\beta}}=\frac{2}{\alpha}\sqrt{\alpha x+\beta}$$

13 $$\int \frac{dx}{x\sqrt{\alpha x+\beta}}=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{\beta}}\log\left|\dfrac{\sqrt{\alpha x+\beta}-\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha x+\beta}+\sqrt{\beta}}\right|, & \beta>0\\[2ex] \dfrac{2}{\sqrt{-\beta}}\operatorname{Artg}\sqrt{\dfrac{\alpha x+\beta}{-\beta}}, & \beta<0\end{cases}$$

Ολοκληρώματα που περιέχουν $\sqrt{x^2\pm\alpha^2},\ \alpha>0$

14 $$\int \sqrt{x^2\pm\alpha^2}\,dx=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2\pm\alpha^2}\pm\frac{\alpha^2}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2\pm\alpha^2}\right|$$

15 $$\int x^2\sqrt{x^2\pm\alpha^2}\,dx=\frac{x}{4}\sqrt{(x^2\pm\alpha^2)^3}\mp\frac{\alpha^2}{8}\left\{x\sqrt{x^2\pm\alpha^2}\pm\alpha^2\log\left|x+\sqrt{x^2\pm\alpha^2}\right|\right\}$$

16 $$\int \frac{\sqrt{x^2+\alpha^2}}{x}\,dx=\sqrt{x^2+\alpha^2}-\alpha\log\left|\frac{\alpha+\sqrt{x^2+\alpha^2}}{x}\right|$$

17 $$\int \frac{\sqrt{x^2-\alpha^2}}{x}\,dx=\sqrt{x^2-\alpha^2}-\alpha\operatorname{Arcos}\frac{\alpha}{x}$$

18 $$\int \frac{\sqrt{x^2\pm\alpha^2}}{x^2}\,dx=-\frac{\sqrt{x^2\pm\alpha^2}}{x}+\log\left|x+\sqrt{x^2\pm\alpha^2}\right|$$

19 $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm\alpha^2}}=\log\left|x+\sqrt{x^2\pm\alpha^2}\right|$$

Ολοκληρώματα που περιέχουν $\sqrt{\alpha^2-x^2},\ \alpha>0$

20 $$\int \sqrt{\alpha^2-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\left\{x\sqrt{\alpha^2-x^2}+\alpha^2\operatorname{Arsin}\frac{x}{\alpha}\right\}$$

21 $$\int x^2\sqrt{\alpha^2-x^2}\,dx=-\frac{x}{4}\sqrt{(\alpha^2-x^2)^3}+\frac{\alpha^2}{8}\left\{x\sqrt{\alpha^2-x^2}+\alpha^2\operatorname{Arsin}\frac{x}{\alpha}\right\}$$

22 $$\int \frac{\sqrt{\alpha^2-x^2}}{x}\,dx=\sqrt{\alpha^2-x^2}-\alpha\log\left|\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-x^2}}{x}\right|$$

23 $$\int \frac{\sqrt{\alpha^2-x^2}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{\alpha^2-x^2}}{x} - \mathrm{Arsin}\,\frac{x}{\alpha}$$

Ολοκληρώματα που περιέχουν $\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$, $\Delta=4\alpha\gamma-\beta^2$

24 $$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\log\left|2\sqrt{\alpha}\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}+2\alpha x+\beta\right|, & \alpha>0 \\ \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\,\mathrm{Arsinh}\,\frac{2\alpha x+\beta}{\sqrt{\Delta}}, & \alpha>0,\ \Delta>0 \\ \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\log|2\alpha x+\beta|, & \alpha>0,\ \Delta=0 \\ -\frac{1}{\sqrt{-\alpha}}\,\mathrm{Arsin}\,\frac{2\alpha x+\beta}{\sqrt{-\Delta}}, & \alpha<0,\ \Delta<0 \end{cases}$$

25 $$\int\sqrt{\alpha^2 x+\beta x+\gamma}\,dx = \frac{2\alpha x+\beta}{4\alpha}\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma} + \frac{\Delta}{8\alpha}\int\frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}$$

Ολοκληρώματα που περιέχουν sin

26 $$\int \sin^2\alpha x\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2\alpha x}{4\alpha}$$

27 $$\int \sin^\nu \alpha x\,dx = -\frac{\sin^{\nu-1}\alpha x\cdot\cos\alpha x}{\nu\alpha} + \frac{\nu-1}{\nu}\int \sin^{\nu-2}\alpha x\,dx$$

28 $$\int x^\nu \sin\alpha x\,dx = -\frac{x^\nu}{\alpha}\cos\alpha x + \frac{\nu}{\alpha}\int x^{\nu-1}\cos\alpha x\,dx$$

29 $$\int \frac{dx}{\sin^\nu \alpha x} = -\frac{1}{\alpha(\nu-1)}\,\frac{\cos\alpha x}{\sin^{\nu-1}\alpha x} + \frac{\nu-2}{\nu-1}\int\frac{dx}{\sin^{\nu-2}\alpha x},\quad \nu>1$$

30 $$\int \sin\alpha x\sin\beta x\,dx = \frac{\sin(\alpha-\beta)x}{2(\alpha-\beta)} - \frac{\sin(\alpha+\beta)x}{2(\alpha+\beta)},\quad |\alpha|\neq|\beta|$$

Ολοκληρώματα που περιέχουν cos

31 $$\int \cos^2\alpha x\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2\alpha x}{4\alpha}$$

32 $$\int \cos^\nu \alpha x\,dx = \frac{\cos^{\nu-1}\alpha x\cdot\sin\alpha x}{\nu\alpha} + \frac{\nu-1}{\nu}\int \cos^{\nu-2}\alpha x\,dx$$

33 $$\int x^\nu \cos\alpha x\,dx = \frac{x^\nu \sin\alpha x}{\alpha} - \frac{\nu}{\alpha}\int x^{\nu-1}\sin\alpha x\,dx,\quad \nu>0$$

34 $$\int \frac{dx}{\cos^\nu \alpha x} = \frac{1}{\alpha(\nu-1)}\cdot\frac{\sin\alpha x}{\cos^{\nu-1}\alpha x} + \frac{\nu-2}{\nu-1}\int\frac{dx}{\cos^{\nu-2}\alpha x},\quad \nu>1$$

35 $$\int \cos\alpha x\cos\beta x\,dx = \frac{\sin(\alpha-\beta)x}{2(\alpha-\beta)} + \frac{\sin(\alpha+\beta)x}{2(\alpha+\beta)},\quad |\alpha|\neq|\beta|$$

Ολοκληρώματα που περιέχουν sin και cos

36 $$\int \sin\alpha x\cos\alpha x\,dx = \frac{1}{2\alpha}\sin^2\alpha x$$

37 $$\int \sin^2\alpha x\cdot\cos^2\alpha x\,dx = \frac{x}{8} - \frac{\sin 4\alpha x}{32\alpha}$$

38 $$\int \sin^\nu\alpha x\cdot\cos^m\alpha x\,dx = -\frac{\sin^{\nu-1}\alpha x\cdot\cos^{m+1}\alpha x}{\alpha(\nu+m)} + \frac{\nu-1}{\nu+m}\int\sin^{\nu-2}\alpha x\cdot\cos^m\alpha x\,dx$$
$$= \frac{\sin^{\nu+1}\alpha x\cdot\cos^{m-1}\alpha x}{\alpha(\nu+m)} + \frac{m-1}{\nu+m}\int\sin^\nu\alpha x\cdot\cos^{m-2}\alpha x\,dx$$

39 $$\int\frac{dx}{\sin^\nu\alpha x\cdot\cos^m\alpha x} = \frac{1}{\alpha(\nu-1)}\cdot\frac{1}{\sin^{\nu-1}\alpha x\cdot\cos^{m-1}\alpha x} + \frac{\nu+m-2}{\nu-1}\int\frac{dx}{\sin^{\nu-2}\alpha x\cdot\cos^m\alpha x}\quad m>0,\ \nu>1$$
$$= \frac{1}{\alpha(m-1)}\cdot\frac{1}{\sin^{\nu-1}\alpha x\cdot\cos^{m-1}\alpha x} + \frac{\nu+m-2}{m-1}\int\frac{dx}{\sin^\nu\alpha x\cdot\cos^{m-2}\alpha x}\quad \nu>0,\ m\geq1$$

40 $$\int \sin\alpha x\cos\beta x\,dx = \frac{-\cos(\alpha+\beta)x}{2(\alpha+\beta)} - \frac{\cos(\alpha-\beta)x}{2(\alpha-\beta)},\quad \alpha^2\neq\beta^2$$

Ολοκληρώματα που περιέχεουν tg και ctg

41 $$\int \mathrm{tg}\,\alpha x\,dx = -\frac{1}{\alpha}\log|\cos\alpha x|$$

42 $$\int \mathrm{tg}^\nu\alpha x\,dx = \frac{1}{\alpha(\nu-1)}\,\mathrm{tg}^{\nu-1}\alpha x - \int\mathrm{tg}^{\nu-2}\alpha x\,dx,\quad \nu>1$$

43 $$\int \mathrm{ctg}\,\alpha x\,dx = \frac{1}{\alpha}\log|\sin\alpha x|$$

44 $$\int \mathrm{ctg}^\nu\alpha x\,dx = -\frac{1}{\alpha(\nu-1)}\,\mathrm{ctg}^{\nu-1}\alpha x - \int\mathrm{ctg}^{\nu-2}\alpha x\,dx,\quad \nu>1$$

λοκληρώματα που περιέχουν υπερβολικές συναρτήσεις

$$\int \sinh^2 x dx = \frac{1}{4}\sinh 2x - \frac{x}{2}$$

$$\int \cosh^2 x dx = \frac{1}{4}\sinh 2x + \frac{x}{2}$$

$$\int \sinh^{\nu} \alpha x dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha\nu}\sinh^{\nu-1}\alpha x \cdot \cosh\alpha x - \frac{\nu-1}{\nu}\int \sinh^{\nu-2}\alpha x dx, & \nu > 0 \\ \frac{1}{\alpha(\nu+1)}\sinh^{\nu+1}\alpha x \cdot \cosh\alpha x - \frac{\nu+2}{\nu+1}\int \sinh^{\nu+2}\alpha x dx, & \nu < -1 \end{cases}$$

$$\int \cosh^{\nu} \alpha x dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha\nu}\sinh\alpha x \cdot \cosh^{\nu-1}\alpha x + \frac{\nu-1}{\nu}\int \cosh^{\nu-2}\alpha x dx, & \nu > 0 \\ -\frac{1}{\alpha(\nu+1)}\sinh\alpha x \cosh^{\nu+1}\alpha x + \frac{\nu+2}{\nu+1}\int \cosh^{\nu+2}\alpha x dx, & \nu < -1 \end{cases}$$

λοκληρώματα που περιέχουν εκθετικές συναρτήσεις

$$\int x^{\nu} e^{\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} x^{\nu} e^{\alpha x} - \frac{\nu}{\alpha}\int x^{\nu-1} e^{\alpha x} dx, \quad \nu > 0$$

$$\int e^{\alpha x}\sin\beta x dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha\sin\beta x - \beta\cos\beta x)$$

$$\int e^{\alpha x}\cos\beta x dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha\cos\beta x + \beta\sin\beta x)$$

λοκληρώματα που περιέχουν λογαριθμικές συναρτήσεις

$$\int \log\alpha x dx = x\log\alpha x - x$$

$$\int (\log\alpha x)^{\nu} dx = x(\log\alpha x)^{\nu} - \nu\int (\log\alpha x)^{\nu-1} dx, \quad \nu \neq -1$$

$$\int x^{\nu}(\log\alpha x)^{m} dx = \frac{x^{\nu+1}}{\nu+1}(\log\alpha x)^{m} - \frac{m}{\nu+1}\int x^{\nu}(\log\alpha x)^{m-1} dx \quad \nu, m \neq -1$$

Ολοκληρώματα που περιέχουν αντίστροφες τριγωνομετρικές και υπερβολικές συναρτήσεις	
55	$\int \mathrm{Arsin}\frac{x}{\alpha}dx = x\mathrm{Arsin}\frac{x}{\alpha} + \sqrt{\alpha^2-x^2}$
56	$\int x^{\nu}\mathrm{Arsin}\frac{x}{\alpha}dx = \frac{x^{\nu+1}}{\nu+1}\mathrm{Arsin}\frac{x}{\alpha} - \frac{1}{\nu+1}\int \frac{x^{\nu+1}}{\sqrt{\alpha^2-x^2}}dx, \ \nu \neq -1$
57	$\int \mathrm{Arcos}\frac{x}{\alpha}dx = x\mathrm{Arcos}\frac{x}{\alpha} - \sqrt{\alpha^2-x^2}$
58	$\int x^{\nu}\mathrm{Arcos}\frac{x}{\alpha}dx = \frac{x^{\nu+1}}{\nu+1}\mathrm{Arcos}\frac{x}{\alpha} + \frac{1}{\nu+1}\int \frac{x^{\nu+1}}{\sqrt{\alpha^2-x^2}}dx, \ \nu \neq -1$
59	$\int \mathrm{Arsinh}\frac{x}{\alpha}dx = x\mathrm{Arsinh}\frac{x}{\alpha} - \sqrt{x^2+\alpha^2}$
60	$\int \mathrm{Arcosh}\frac{x}{\alpha}dx = x\mathrm{Arcosh}\frac{x}{\alpha} \mp \sqrt{x^2-\alpha^2}$

ΣΤ΄. ΠΙΝΑΚΑΣ ΟΡΙΣΜΕΝΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ

1	$\int_0^{\pi/2}\sin^{\alpha}x dx=\int_0^{\pi/2}\cos^{\alpha}x dx=\begin{cases}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(\alpha-1)}{2\cdot4\cdots\alpha}\cdot\frac{\pi}{2}, & \alpha \text{ άρτιος}\\ \frac{2\cdot4\cdot6\cdots(\alpha-1)}{1\cdot3\cdot5\cdots\alpha}, & \alpha \text{ περιττός}\end{cases}$
2	$\int_0^{2\pi}\sin kx\cdot\sin\lambda x dx=\int_0^{2\pi}\cos kx\cdot\cos\lambda x dx=\begin{cases}0, & k\neq\lambda\\ \pi, & k=\lambda\neq0\end{cases}, \quad k,\lambda\in Z$
3	$\int_0^{2\pi}\sin kx\cdot\cos\lambda x dx=0, \quad k,\lambda\in Z$
4	$\int_0^{\pi}\sin kx\cdot\sin\lambda x dx=\int_0^{\pi}\cos kx\cdot\cos\lambda x dx=\begin{cases}0, & k\neq\lambda\\ \frac{\pi}{2}, & k=\lambda\neq0\end{cases} \quad k,\lambda\in Z$
5	$\int_0^{\pi}\sin kx\cdot\cos\lambda x dx=\begin{cases}0, & k=\lambda \text{ ή } k+\lambda \text{ άρτιος}\\ \frac{2k}{k^2-\lambda^2}, & k+\lambda \text{ περιττός}, \ k^2-\lambda^2\neq0\end{cases}$
6	$\int_0^{\pi}\sin^2kx dx=\int_0^{\pi}\cos^2kx dx=\frac{\pi}{2}$
7	$\int_0^{\pi}\frac{dx}{\alpha+\beta\cos x}=\frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}, \quad \alpha>\beta>0$
8	$\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\alpha^2\cos^2x+\beta^2 xin^2x}=\frac{\pi}{2\alpha\beta}, \quad \alpha\beta\neq0$

Ζ΄. ΠΙΝΑΚΑΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ LAPLACE

α/α	f(t)	F(s)
1	1	$\frac{1}{s}$
2	t^{ν}	$\frac{\nu!}{s^{\nu+1}}$
3	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{s-\alpha}$
4	$t^{\nu}e^{\alpha t}$	$\frac{\Gamma(\nu+1)}{(s-\alpha)^{\nu+1}}$
5	$\sin\alpha t$	$\frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}$
6	$\cos\alpha t$	$\frac{s}{s^2+\alpha^2}$
7	$e^{kt}\sin\alpha t$	$\frac{\alpha}{(s-k)^2+\alpha^2}$
8	$e^{kt}\cos\alpha t$	$\frac{s-k}{(s-k)^2+\alpha^2}$
9	$\sinh\alpha t$	$\frac{\alpha}{s^2-\alpha^2}$
10	$\cosh\alpha t$	$\frac{s}{s^2-\alpha^2}$
11	$e^{kt}\sinh\alpha t$	$\frac{\alpha}{(s-k)^2-\alpha^2}$
12	$e^{kt}\cosh\alpha t$	$\frac{s-k}{(s-k)^2-\alpha^2}$
13	$\frac{e^{\beta t}-e^{\alpha t}}{\beta-\alpha}$	$\frac{1}{(s-\alpha)(s-\beta)}, \quad \alpha\neq\beta$
14	$\frac{\beta e^{\beta t}-\alpha e^{\alpha t}}{\beta-\alpha}$	$\frac{s}{(s-\alpha)(s-\beta)}, \quad \alpha\neq\beta$
15	$t\sin\alpha t$	$\frac{2\alpha s}{(s^2+\alpha^2)^2}$
16	$t\cos\alpha t$	$\frac{s^2-\alpha^2}{(s^2+\alpha^2)^2}$

17	$t\sinh at$	$\frac{2as}{(s^2-a^2)^2}$
18	$t\cosh at$	$\frac{s^2+a^2}{(s^2-a^2)^2}$
19	$\sin at * \sinh at$	$\frac{2a^2 s}{s^4+4a^4}$
20	$\cos at * \cosh at$	$\frac{s^3}{s^4+4a^4}$
21	$\sinh at-\sin at$	$\frac{2a^3}{s^4-a^4}$
22	$\sinh at+\sin at$	$\frac{2as^2}{s^4-a^4}$
23	$\cosh at-\cos at$	$\frac{2a^2 s}{s^4-a^4}$
24	$\cosh at+\cos at$	$\frac{2s^3}{s^4-a^4}$
25	$\lvert\sin kt\rvert$	$\frac{k}{s^2+k^2}\,\mathrm{ctgh}\,\frac{\pi s}{2k}$
	$\begin{cases} \sin t, & (2\nu-2)\pi < t < (2\nu-1)\pi \\ 0, & (2\nu-1)\pi < t < 2\nu\pi \end{cases}$	$\frac{1}{(s^2+1)(1-e^{-\pi s})}$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. T. Apostol, Calculus Vol. I, Xerox, Wattham, 1967(Ελληνική μετάφραση έκδοση Σ. Πεχλιβανίδη)
2. T. Apostol, Mathematical Analysis, Addison-Wesley Publ. Co. 1974
3. R. Bartle-D. Sherbert, Introduction to Real Analysis, John Wiley & sons, inc 1982
4. G. Berman, A Problem Book in Mathematical Analysis, Mir Publishers Moscow, 1977
5. F. Bowmman - F. Gerand, Higher Calculus, Cambridge University Press, 1967
6. L. Brand, Advanced Calculus, John Wiley & sons 1965(Ελληνική μετάφραση Ε.Μ.Ε)
7. C. Burrill - J. Knudsen, Real variables, Host, Rinehart and winston, inc. 1969
8. R. Courant - F. John, Introduction to Calculus and Analysis Vol I, Interscience Publ. 1965
9. J. Edwards, A treatise on the integral Calculus, Chelsea Publ. Co 1930

10. B. Gelbaum - J. Olmsted, Counter examples in Analysis, Holden - Day, 1964

11. R. Golberg, Methods of Real Analysis, Blaisdell, 1964

12. R. Goodstein, A text Book of Mathematical Analysis, Oxford University Press 1949

13. E. Hille , Analysis Vol. I, Blaisdell Publ. Co 1964

14. Δ. Κάππος, Απειροστικός Λογισμός, Αθήνα 1962

15. G. Korn - T. Korn, Mathematical Hanbook for scientists, and engineers, Mac-Graw Hill Co 1968

16. R. Larson - R. Hostetler, Calculus, Heath Co 1979

17. J. Marsden, Elementary Classical Analysis, W.H. Freeman and Co. 1974

18. I. Maron, Problems in Calculus of one variable, Mir Publishers Moscow 1975

19. S. Nikolski, A Course of Mathematical Analysis, Mir Publishers Moscow 1981

20. D. Quadling, Mathematical Analysis, Oxford University Press 1966

21. R. Rankin, An Introduction to Mathematical Analysis, Pergamon Press 1963

22. H. Sagan, Advanced Calculus, Houghton Mifflin Co 1974

23. M. Spiegel, Laplace trans forms, Schaum's outline series in Mathematics, Mac-Graw Hill Co. 1965

24. B. Στάϊκος, Σημειώσεις Απειροστικού Λογισμού, Ιωάννινα 1980

25. O. Stanaitis, An Introduction to sequences, series and improper integrals, Holden - Day 1967

26. A. Taylor, Advanced Calculus, Blaisdell Publ Co 1955

27. W. Trench, Advanced Calculus, Harper & Row Publ, New York, 1978.

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟΝ ΟΡΩΝ

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΟΝΟΜΑΤΩΝ